FACULTAD DE CONTABILIDAD Y AUDITORIA

INVESTIGACION OPERATIVA

Ing. Marco Guachimboza

Septiembre - Febrero 2012

AMBATO - ECUADOR

PRESENTACION

La **Investigación de Operaciones** o **Investigación Operativa**, es una rama de las Matemáticas consistente en el uso de modelos matemáticos, estadística y algoritmos con objeto de realizar un proceso de toma de decisiones. Frecuentemente, trata del estudio de complejos sistemas reales, con la finalidad de mejorar (u optimizar) su funcionamiento. La investigación de operaciones permite el análisis de la toma de decisiones teniendo en cuenta la escasez de recursos, para determinar cómo se puede optimizar un objetivo definido, como la maximización de los beneficios o la minimización de costes

La presente guía será un apoyo didáctico para los estudiantes. El material contenido en este texto está proyectado de manera que pueda usarse como medio instruccional para un curso formal de Investigación Operativa. También servirá como una obra de consulta y como texto de aprendizaje sin maestros.

El primer capítulo constituye una revisión y resumen de ciertas definiciones y un enfoque a la metodología que se aplicara en la resolución de problemas de IO. El segundo capítulo trata el tema de Programación lineal en que se plantearan y resolverán problemas de modelos lineales, a través del método grafico y método simplex y se aborda el tema de dualidad. En el tercer capítulo se plantea le resolución de modelos de transporte a través del método de la esquina noroeste y del costo mínimo. Los capítulos restantes resumen la planificación de proyectos, con las diferentes técnicas en los temas de REDES PERT, PERT/TIEMPO, PERT/COSTO

Estamos convencidos de que este modulo aportara con elementos novedosos a la enseñanza aprendizaje de las matemáticas financieras.

UNIDAD I

INTRODUCCION Y DEFINICIONES

1.1. INTRODUCCION

En el desarrollo del material de la asignatura, se hace considerando a la Investigación de Operaciones como una ciencia administrativa basada en el enfoque científico, para resolver problemas y proporcionar ayuda para la toma de decisiones. Planear, organizar, dirigir, dotar de personal, controlar, son actividades que los estudiantes tendrán que desarrollar en el ejercicio profesional una vez concluida la carrera, y la Investigación de Operaciones le sirve de ayuda con su método analítico y sistemático. Con base en este enfoque gerencial es que se plantea en el presente manual el estudio de esta ciencia.

TOMA DE DECISIONES CON INVESTIGACION OPERATIVA

Tomar decisiones es la tarea esencial de toda persona o grupo que tiene bajo su responsabilidad el funcionamiento de una organización entera o parte de ella.

La investigación operativa está relacionada con la toma de decisiones, a través de la investigación de operaciones (métodos o modelos matemáticos) que permiten determinar Aplicaciones de Practicas Reales.

Estas prácticas reales pueden estar definidas en diferentes Ámbitos:

- Formulación de mezclas
- Planificación y evaluación de proyectos
- Distribución de productos
- Equipos de computación
- Asignación de recursos

En la toma de decisiones el análisis puede tomar dos formas: cualitativo y cuantitativo.
El análisis cualitativo se basa principalmente en el juicio y experiencia de la gerencia, incluye sentimientos intuitivos sobre el problema tratado y es más un arte que una ciencia. El análisis cuantitativo se concentra en hechos cuantitativos o datos asociados con los problemas y desarrolla expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes en ellos.

Seguidamente, utilizando métodos cuantitativos, obtiene resultados con los que se hacen recomendaciones basadas en los aspectos cuantitativos del problema. En otros casos, el análisis cuantitativo es sólo una ayuda para tomar la decisión y sus resultados deben ser combinados con información cualitativa.

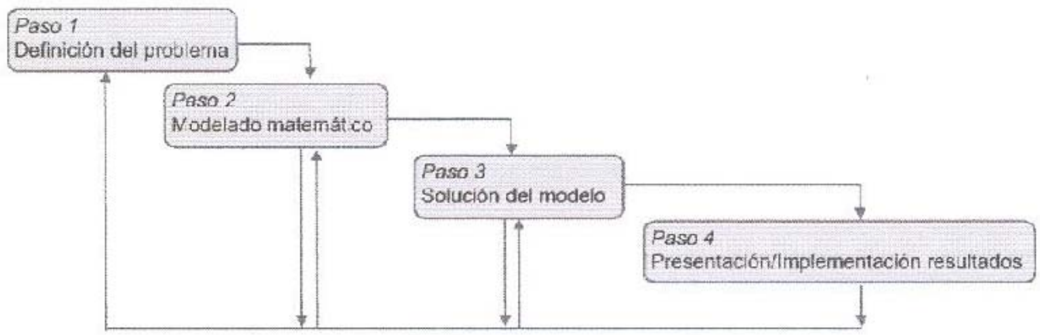
1.2. DEFINICION DE INVESTIGACION OPERATIVA

¿Qué es la Investigación Operativa?

La Investigación Operativa, es la aplicación de procedimientos, técnicas y herramientas científicas, para lograr desarrollar y evaluar soluciones, eliminando la incertidumbre (no tener certeza) en la toma de decisiones.

1.3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

En su forma más simple, la Investigación Operativa puede considerarse como un procedimiento que consta de cuatro pasos o etapas, tal como se muestra en la Figura



Sin embargo, los proyectos raramente se ajustan totalmente a este esquema en cascada, sino que normalmente los modelos han de ser revisados, las soluciones han de ser modificadas o los informes han de ser reescritos a medida que se modifican y ajustan el conjunto inicial de datos e hipótesis. Por tanto, algunas partes del proceso deben repetirse hasta que se encuentra una solución adecuada.

Paso 1. Definición del problema

Quizás la parte más importante de todo el proceso sea la definición del problema. Una respuesta incorrecta a una pregunta correcta no suele tener consecuencias fatales, ya que se pueden hacer revisiones y explorar otras alternativas: sin embargo, la respuesta correcta a una pregunta incorrecta puede ser desastrosa. Es importante que el problema esté claramente definido antes de invertir una gran cantidad de trabajo y energía en resolverlo.

Paso 2. Modelado matemático

El modelado matemático es un procedimiento que reconoce y verbaliza un problema para posteriormente cuantificarlo transformando las expresiones verbales en expresiones matemáticas. El modelado matemático es un *arte,* que mejora con la práctica. El proceso del modelado matemático consta de cuatro pasos:

2.1. Identificar las variables de decisión

Un paso crucial en la construcción de un modelo matemático es determinar aquellos factores *sobre los qué el decidor tiene control,* que normalmente se llaman variables de decisión del problema. Hay que distinguir entre 10 que está a nuestro alcance cambiar (por ejemplo, la cantidad de artículos a producir de cada producto o el material a utilizar) de aquello que no podemos modificar (como el número de horas de trabajo disponibles o fechas límite a cumplir), que normalmente denominaremos *parámetros.* Según el tipo de problema, 10 que a veces es una variable de decisión en otros casos puede ser un parámetro o viceversa.
Para identificar las variables de decisión, puede ser útil hacerse las siguientes preguntas: ¿qué es lo que hay que decidir? o ¿sobre qué elementos tenemos control? o ¿cuál sería una respuesta válida para este caso?

2.2. Identificar la función objetivo

El objetivo de la mayoría de los estudios de IO, y el de todos los modelos de optimización, es encontrar el modo de optimizar alguna medida respetando las restricciones existentes. Aunque una compañía quizás esté satisfecha con una mejora sustancial de la situación actual, normalmente el objetivo es buscar el valor óptimo para cierta función.

A la hora de encontrar la función objetivo, la pregunta que podemos hacemos es ¿qué es lo que queremos conseguir? o Si yo fuera el jefe de esta empresa, ¿qué me interesaría más?".

2.3. Identificar las restricciones

En la búsqueda de la solución óptima, normalmente existen ciertas restricciones (limitaciones, requisitos) que limitan nuestra decisión. Ejemplos de restricciones frecuentes son: los recursos disponibles (trabajadores, máquinas, material, etc.) son limitados; fechas límite impuestas por los contratos; restricciones impuestas por la naturaleza del problema (por ejemplo: el flujo de entrada a un nodo debe ser igual al flujo de salida).

2.4. Traducir los elementos anteriores a un modelo matemático

Una vez identificados los elementos básicos hay que expresarlos matemáticamente. Dependiendo de la naturaleza de las funciones matemáticas, el modelo será de un tipo u otro; por ejemplo, si todas ellas son lineales, el problema será de Programación Lineal; si existe más de una función objetivo, será de programación multicriterio, etc.

Paso 3. Resolución del modelo

Aceptado ya el modelo matemático que mejor describe la situación en estudio, se aplican los algoritmos y métodos matemáticos diseñados para su resolución.

Paso 4. Presentación/Implementación de los resultados

Éste es el paso final dentro del proceso y consta de las siguientes tareas.

4.1 Preparar informes y/o presentaciones.

La comunicación efectiva de los resultados de un estudio es esencial para el éxito del mismo. La utilidad del análisis será nula si las personas que toman las decisiones no aprecian totalmente su valor. Los decisores deben comprender completamente el enfoque del analista, las hipótesis y simplificaciones que se han hecho, y la lógica en la recomendación. Las presentaciones orales (utilizando transparencias, videos o software especializado) y los informes son formas tradicionales para la comunicación.

4.2 Vigilar el proceso de implementación.

Una vez que se ha emitido el informe o se ha hecho la presentación, debe implementarse la solución propuesta, que a veces puede suponer cambios que sean conflictivos y encuentren resistencia en los miembros de la empresa. El apoyo del analista puede resultar crítico.

Una vez implementada la solución, debe ser supervisada de forma continua. Dada la naturaleza dinámica y cambiante de la mayoría de las empresas, es casi inevitable que haya que realizar cambios en el modelo. El analista debe estar preparado para saber cuándo ha llegado el momento de cambiar y para realizar dichos cambios.

1.4 TAREAS PROPUESTAS (DURACION ESTIMADA 8 HORAS)

1) Realice un resumen de la unidad uno, a través de un ordenador grafico (mapa conceptual, diagrama arañe, organigrama, etc.)
2) Consultar a cerca de los modelos matemáticos, su definición y 2 ejemplos (preferiblemente relacionados Contabilidad)

Nota, las dos tares deben realizarse a mano en hojas de papel ministro

UNIDAD DOS

PROGRAMACION LINEAL

2.1. GENERALIDADDES

Introducción.

En cualquier empresa, muchas de las decisiones que se toman tienen por objeto hacer el mejor uso posible (**optimización**) de los recursos de la misma. Por recursos de una empresa entendemos la maquinaria que ésta posea, sus trabajadores, capital financiero, instalaciones, y las materias primas de que disponga. Tales recursos pueden ser usados para fabricar productos (electrodomésticos, muebles, comida, ropa, etc.) o servicios (horarios de producción, planes de marketing y publicidad, decisiones financieras, etc.). La **Programación Lineal** (PL) es una técnica matemática diseñada para ayudar a los directivos en la planificación y toma de decisiones referentes a la asignación de los recursos. Como ejemplos de problemas donde la PL desarrolla un papel fundamental, podríamos citar:

1. A partir de los recursos disponibles, determinar las unidades a producir de cada bien de forma que se maximice el beneficio de la empresa.
2. Elegir materias primas en procesos de alimentación, para obtener mezclas con unas determinadas propiedades al mínimo coste.
3. Determinar el sistema de distribución que minimice el coste total de transporte, desde diversos almacenes a varios puntos de distribución.
4. Desarrollar un plan de producción que, satisfaciendo las demandas futuras de los productos de una empresa, minimice al mismo tiempo los costes totales de producción e inventario.

Dentro de la investigación operativa los casos o problemas mas sobresalientes se resuelven por medio de la programación lineal, siendo de gran ayuda en la toma de decisiones finales.

Como su nombre lo indica la programación lineal se refiere exclusivamente a relaciones lineales, es decir a inecuaciones o ecuaciones de primer grado aplicadas a resolución de problemas. La programación lineal se ocupa en problemas de insumos de producción, aplicaciones macroeconómicas de producción, asignación de recursos, maximización de recursos, minimización de costos, etc.

Concepto.

Es un proceso sistemático y matemático de enfocar un problema para lograr una solución óptima o la mejor posible de entre varias, empleando una función objetivo (propósito del problema), un conjunto de restricciones lineales y una condición de eliminar valores negativos. Los problemas de programación lineal planteados y resueltos con cualquiera de los métodos deberán cumplir con tres soluciones necesarias y suficientes.

a) Función Objetivo.- Es la ecuación que expresa la cantidad que va ha ser maximizada o minimizada, según el objetivo planteado y se la reconoce con la ecuación:

$$Z = C1X1+C2X2+C3X3+\dots\dots\dots\dots+ CnXn$$

Se acostumbra a realizar:

Z (MAX), para la maximización

Z (MIN), para la minimización

Xj, simboliza matemáticamente a las variables de decisión. Son los valores numéricos que se determinan con la solución del modelo y *representan* o están relacionadas con una actividad o acción a tomar. Son los únicos valores desconocidos en el modelo y pueden existir en cualquier cantidad, desde 1 hasta n variables. Es decir, j varía desde 1 hasta n. Son las variables del problema, las incógnitas a resolver o lo que queremos lograr.

En la ecuación Cj, matemáticamente, simboliza el coeficiente de la variable j en la Función Objetivo. Son datos relevantes, insumos incontrolables ya conocidos. En la Función Objetivo *representan* la cantidad con la cual contribuye cada unidad de la variable j, al valor total deseado en el objetivo, pudiendo ser márgenes de beneficios, precios, costos unitarios, etc.

b) Limitaciones o Restricciones.- Es el conjunto de inecuaciones o ecuaciones que nos expresan las condiciones del problema, denominadas también coeficientes técnicos de producción.

El sistema de ecuaciones se presenta:

$$\begin{array}{lll}
a11X1 + a12X2 + a13X3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots. + a1nXn & T1 & b1 \\
a21X1 + a22X2 + a23X3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots. + a2nXn & T2 & b2 \\
a31X1 + a32X2 + a33X3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots. + a3nXn & T3 & b3 \\
\qquad\qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . & . & \\
\qquad\qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . & . & \\
\qquad\qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . & . & \\
am1X1 + am2X2 + am3X3 + \dots\dots\dots\dots\dots. + amnXn & Tm & bm
\end{array}$$

En donde:

$$\left.\begin{array}{l}
a11, a12, a13, \dots\dots\dots\dots, am \\
. \\
. \\
. \\
am1, am2, am3, \dots\dots\dots\dots, amn
\end{array}\right\} \quad \text{Coeficientes técnicos}$$

X1, X2, X3, ..., Xn: Son las variables o incógnitas del problema.

T1, T2, T3, ..., Tm: Son los límites de l sistema, se representan >=, <=, =

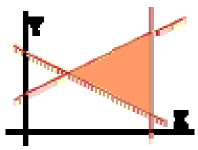
b1, b2, b3, ..., bm: son los valores máximos o mínimos.

c) Condición de no negatividad.- En ningún caso admitirá valores negativos que den respuesta al problema, pues no concibe tener una producción negativa, distancias negativas, gastos negativos; estos tendrán que ser por lo menos iguales a cero, es decir Xn >= 0, la cual se le considera siempre presente como una condición natural en el Modelo Lineal General.

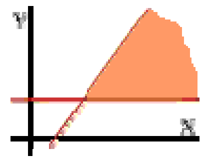
2.2. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE EL MÉTODO GRÁFICO

2.2.1. Determinación de la Región Factible

La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de **región factible**, y puede estar o no acotada.



Región factible acotada



Región factible no acotada

La región factible incluye o no los lados y los vértices, según que las desigualdades sean en sentido amplio ($\leq$ o $\geq$) o en sentido estricto (< o >).

Si la región factible está acotada, su representación gráfica es un polígono convexo con un número de lados menor o igual que el número de restricciones.

El procedimiento para determinar la región factible es el siguiente:

1) Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.

Se dibuja la recta asociada a la inecuación. Esta recta divide al plano en dos regiones o semiplanos

Para averiguar cuál es la región válida, el procedimiento práctico consiste en elegir un punto, por ejemplo, el (0,0) si la recta no pasa por el origen, y comprobar si las coordenadas satisfacen o no la inecuación. Si lo hacen, la región en la que está ese punto es aquella cuyos puntos verifican la inecuación; en caso contrario, la región válida es la otra.

2) La región factible está formada por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones. Como sucede con los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución, en el caso de que exista el conjunto solución puede ser acotado o no.

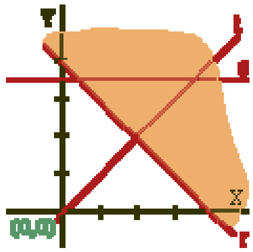
Veámoslo con un ejemplo: Dibuja la región factible asociada a las restricciones:

$x + y \geq 4$

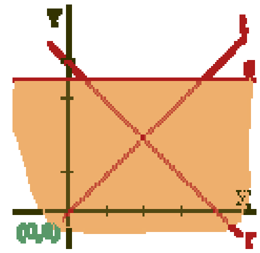
$y \leq 4$

$y \geq x$

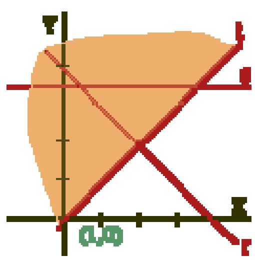
Las rectas asociadas son: r : $x + y = 4$; s : $y = 4$, t: $y = x$



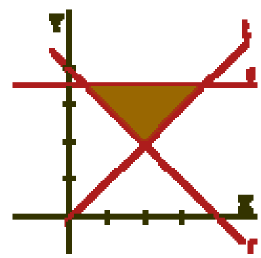
Elegimos el punto O(0,0), que se encuentra en el semiplano situado por debajo de la recta. Introduciendo las coordenadas (0,0) en la inecuación $x + y \geq 4$, vemos que no la satisface: $0 + 0 = 0 < 4$. Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano situado por encima de la recta r : $x + y = 4$.



Procedemos como en el paso anterior. Las coordenadas (0,0) satisfacen la inecuación $y \leq 4$ ($0 \leq 4$) . Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano que incluye al punto O.



La recta t asociada a la restricción pasa por el origen, lo cual significa que si probásemos con el punto O(0,0) no llegaríamos a ninguna conclusión. Elegimos el punto (1,0) y vemos que no satisface la inecuación $y \geq x$ ($y = 0 < 1 = x$). Por tanto, el conjunto solución de esta inecuación es el semiplano determinado por la recta t que no incluye al punto (1,0).



La región factible está formada por los puntos que cumplen las tres restricciones, es decir, se encuentran en los tres semiplanos anteriores

2.2.2. Procedimiento de Resolución del Método Grafico

Este método permite visualizar las alternativas que se van presentando y que son sujetas a eliminaciones hasta encontrar la solución optima.

Este método deberá de cumplir con las tres primeras condiciones antes mencionadas.

En el método grafico se trata de resolver por aproximaciones sucesivas o iteraciones gráficas, la posibilidad de mejorar las soluciones de conformidad con la función objetiva. Mediante este método se puede resolver únicamente problemas para solo dos incógnitas, más de dos variables es imposible su representación gráfica. Para explicar la resolución a través de este Método, lo haremos con le planteamiento de un ejercicio.

EJERCICIOS:

1.- Una Fabrica produce dos Tipos de Productos el Producto A y el Producto B; El primero requiere de la utilización de 7 Kilogramos de Materia Prima, de 2 hora/hombre de Mano de Obra, y de 4.5 horas/maquina de Utilización de Maquinaria. El segundo requiere de 3 Kilogramos de Materia Prima,3 horas/hombre de Mano de Obra y 4 horas/maquina de Utilización de Maquinaria.

La Empresa cuenta para la fabricación de productos con los siguientes recursos, 21 Kilogramos de Materia Prima, 12 horas/hombre de Mano de Obra y de 18 horas/maquina.

Cuál es la combinación optima de producción que maximice el Beneficio, suponiendo que la Fabrica estima ganar 15 dólares por cada unidad del Producto A, y 11 dólares por cada unidad del producto B.

Lo primero siempre es aconsejable establecer o plantear cuales son los datos del problema.

Datos del Problema.

REQUIEREN	**PRODUCTOS**		**RECURSOS DISPONIBLES**
	A	**B**	
Materia Prima	7Kg	3Kg	21Kg
Mano de Obra	2h/H	3h/H	12h/H
Utilización Maquinaria	4.5h/M	4h/M	18h/m
Beneficio	15 $	11 $	

Lo siguiente es realizar la Formulación del Modelo Lineal para lo cual seguimos los pasos ya mencionados anteriormente.

1. Variable de Decisión

X1= Cantidad a Producirse del Producto A

X2= Cantidad a Producirse del Producto B

2. Función Objetivo

$$Z(Max) = \frac{15\$}{Unid.A} X_1 Unid.A + \frac{11\$}{Unid.B} X_2 Unid.B$$

3. Restricciones

Referente a Materia Prima: $7X_1 + 3X_2 \leq 21kg$

Referente a mano de Obra: $2X_1 + 3X_2 \leq 12h/H$

Referente a Utilización de Maquinaria: $4,5X_1 + 4X_2 \leq 18h/M$

4. Condición de No Negativa.

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

Luego de realizar la formulación del modelo lineal es necesario generara la resolución del ejercicio, para lo cual se siguen los siguientes pasos.

5. Representar gráficamente el conjunto de restricciones lineales y marcar o establecer la región factible.

- Establecemos los puntos o valores de intersección de cada una de las restricciones con cada uno de los ejes del plano si la ecuación o inecuación lo permite, caso contrario se establecen valores para poder representar gráficamente cada restricción.

1)

$$7X_1 + 3X_2 \leq 21$$
$$X_2 \leq \frac{21 - 7X_1}{3}$$

X1	X2
0	7
3	0

2)

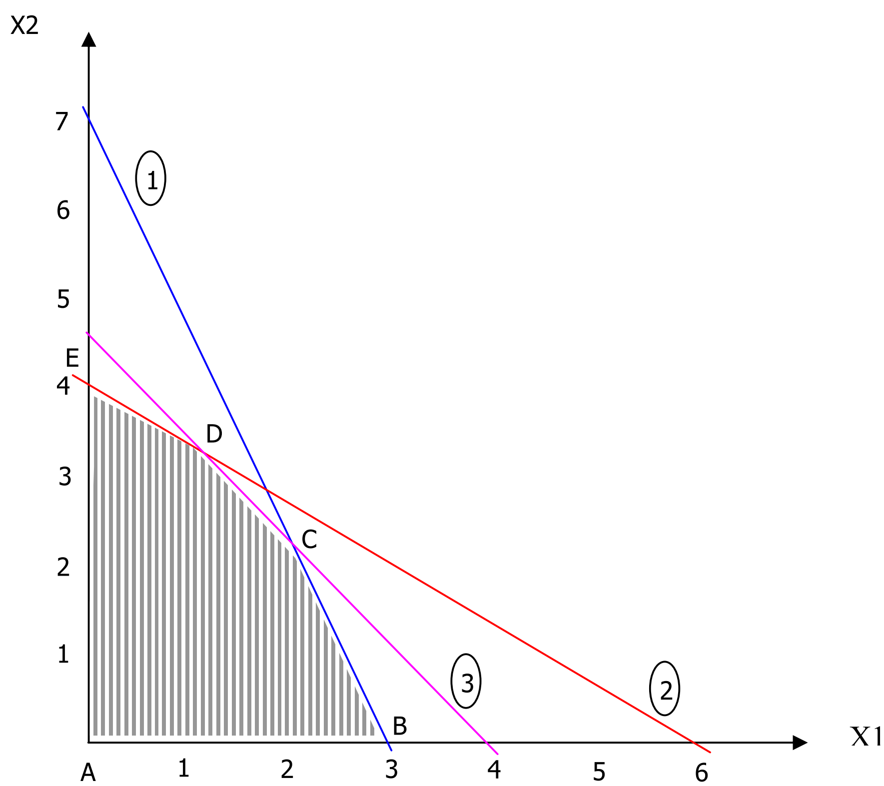
$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$X_2 \leq \frac{12 - 2X_1}{3}$$

X1	X2
0	4
6	0

3)

$$4{,}5X_1 + 4X_2 \leq 18$$
$$X_2 \leq \frac{18 - 4{,}5X_1}{4}$$

X1	X2
0	4,5
4	0



6. Hallar las coordenadas de los vértices del polígono obtenido.

Punto C

Entre la recta 1 y 2

$$7X_1 + 3X_2 = 21(-4)$$
$$4.5X_1 + 4X_2 = 18(3)$$

$$-28X_1 - 12X_2 = -84$$
$$13.5X_1 + 12X_2 = 54$$

$$-14.5X_1 / = -30$$
$$X_1 = 2.06$$

$$7(2.06) + 3X_2 = 21$$
$$X_2 = \frac{21 - 7(2.06)}{3}$$
$$X_2 = 2.17$$

Punto D

Entre la recta 2 y 3

$$2X_1 + 3X_2 = 12(-4)$$
$$4.5X_1 + 4X_2 = 18(3)$$

$$-8X_1 - 12X_2 = -48$$
$$13.5X_1 + 12X_2 = 54$$

$$5.5X_1 / = 6$$
$$X_1 = 1.09$$

$$2(1.09) + 3X_2 = 12$$
$$X_2 = \frac{12 - 2(1.09)}{3}$$
$$X_2 = 3.37$$

Los vértices son los siguientes

A (0,0)

B (3,0)

C (2.06, 2.17)

D (1.09, 3.37)

E (0,4)

7. Sustituir las coordenadas de estos puntos en la Función Objetivo y Hallar el valor Máximo (maximización) o Mínimo (Minimización), des esta forma encontrar la solución optima.

$$Z = 15X_1 + 11X_2$$

A en Z

Z=0

B en Z

$$Z = 15(3) + 11(0)$$
$$z = 45$$

C en z

$$Z = 15(\cancel{2.06}) + 11(\cancel{2.17})$$
$$z = 52$$

D en Z

$$Z = 15(\cancel{1.09}) + 11(\cancel{3.37})$$
$$z = 48$$

E en Z

$$Z = 15(0) + 11(4)$$
$$z = 44$$

Z = 52 Solución Optima, Factible

8. Interpretación de la Solución (Lógica).

La Empresa debe fabricar 2 unidades del Producto A, y 2 Unidades del producto B, para obtener un máximo Beneficio de 52 Dólares

9. Comprobación

Los puntos de la solución tienen que satisfacer todas las restricciones y la función objetivo:

$$7X_1 + 3X_2 \le 21 \qquad 2X_1 + 3X_2 \le 12 \qquad 4{,}5X_1 + 4X_2 \le 18$$

$$7(2) + 3(2) \le 21 \qquad 2(2) + 3(2) \le 12 \qquad 4{,}5(2) + 4(2) \le 18$$

$$20 \le 21 \qquad 10 \le 12 \qquad 17 \le 18$$

2.2.3 TAREAS PROPUESTAS

Resolver los siguientes Modelos Lineales utilizando el método grafico (DURACION ESTIMADA 7 HORAS)

1.- Resolver el siguiente ejercicio e identificar el análisis de sensibilidad para los coeficientes de la Función Objetivo y cada uno de los términos independientes de las restricciones.

a) F (Max) = 1.5x + 2y
x ≤ 20
y ≤ 10
x ≥ y
1.5x + 2y ≥ 6
x ≥ 0
y ≥0

2.- El jefe de seguridad de un museo estudia combinar 2 nuevos sistemas antirrobo: cámaras de vigilancia en las salas, y alarmas en puntos estratégicos del edificio. Se quiere utilizar un mínimo de 6 cámaras para cubrir con ellas las salas más importantes, y un máximo de 15 cámaras, con las que quedarían todas las salas cubiertas. Igualmente, se necesitan al menos 6 alarmas para cubrir las más importantes entradas y salidas del edificio. Finalmente, se tiene un presupuesto máximo de 36.000 euros, y cada cámara cuesta 1.000 euros mientras que cada alarma cuesta 500 euros.
¿Qué combinaciones de unidades de cada sistema se pueden instalar cumpliendo los requerimientos anteriores? Si el objetivo es colocar el mayor número de dispositivos entre cámaras y alarmas

Sol: instalar 6 cámaras de vigilancia y 60 alarmas

3.- Unos grandes almacenes desean liquidar no más 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello lanzan dos ofertas, A y B: La oferta A consiste en un lote de una camisa y pantalón, que se venden en 30 euros: la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende en 50 euros. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta A ni menos de 10 de la oferta B.
a)¿Cuántos lotes se ha de vender de cada tipo para maximizar las ganancias?
Sol: X1=90; X2=10

4.- Una refinería de petróleo tiene dos fuentes de petróleo crudo: crudo ligero, que cuesta 35 dólares por barril y crudo pesado que cuesta 30 dólares por barril. Con cada barril de crudo ligero, la refinería produce 0.3 barriles de gasolina (G), 0,2 barriles de combustible para calefacción (C) y 0,3 barriles de (T); mientras que con cada barril de crudo pesado, produce 0,3 barriles de (G), 0,4 barriles de (C) y 0,2 barriles de (T). La refinería ha sido contratada para cubrir la demanda de el suministro de 900000 barriles de G, 800000barriles de C y 500000 barriles de T. Hallar las cantidades de crudo ligero y pesado que debe comprar para poder cubrir sus necesidades al costo mínimo.

Sol: 3000000 de barriles de crudo pesado y ningún crudo liguero

5.- La fábrica Gepetto S.A construye soldados y trenes de madera. El precio de venta al público de un soldaos es de 2700 pesos y de un tren 2100 pesos. Gepetto estima que fabricar un soldado supone un gasto de 1000 pesos de materias primas y de 1400 pesos de costes laborales. Fabricar un tren exige 900 pesos de materias primas y 1000 pesos de costos laborales. La construcción de ambos tipos de juguetes requiere un trabajo previo de carpintería y un proceso final de acabado (pintura, revisión de las piezas fabricadas, empaquetado etc.). Para fabricar un soldado se necesita una 1 de carpintería y dos 2 del proceso final de acabado. Un tren necesita 1 hora de carpintería y 1 hora para el proceso de acabado. Gepetto no tiene problemas de abastecimiento de materias primas, pero solo puede contar semanalmente un máximo de 80 horas de carpintería y un máximo de 100 horas para los trabajos de acabado. Por exigencias del mercado, Gepetto fabrica como máximo 40 soldados a la semana. No ocurre así con los trenes para los que no hay ningún tipo de restricción en cuanto al número de unidades fabricadas.
Obtén el número de de soldados y de trenes que semanalmente deberá fabricar la empresa para maximizar sus beneficios.

Sol: 20 soldados, 60 trenes

6. Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más las cuatro unidades. Por otra parte, el triple de la producción de vinagre más cuatro unidades la producción de vino se mantiene siempre menor o igual a 18 unidades.
Halla el número de unidades de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada unidad de vino deja un beneficio de 800 ptas. Y cada unidad de vinagre 200 ptas.

7.- Un grupo musical va a lanzar su nuevo trabajo al mercado. La casa discográfica considera necesario realizar una campaña de publicidad, combinando dos posibilidades: anuncios en televisión, con un coste estimado de 1 millón de pesetas pr anuncio, y cuñas radiofónicas, con un coste estimado de 100.000 PTAS por cuña. No obstante, no pueden gastar más de 100 millones de pesetas para dicha campaña, a lo largo de la cual se tienen que emitir al menos 50 y no más de 100 cuñas. Un estudio de mercado cifra en 10.000 el número de copias que se venderán por anuncio de televisión emitido, y en 2.000 copias por cuña radiofónica emitida.
¿Qué combinación de ambos se debería realizar para vender el mayor número de copias posible? ¿ s

Sol: 90 anuncios TV, 100 cuñas radiofónicas.

8.- Una empresa fabrica tres productos, P1, P2 y P3, en dos plantas, A y B. La planta A produce diariamente 1.000 unidades de P1, 3.000 unidades de P2 y 5.000 de P3. La planta B produce diariamente 2.000 unidades de cada uno de los tres productos. La empresa se ha comprometido a entregar a sus clientes, al menos, 80.000 unidades de P1, 160.000 de P2 y 200.000 de P3.
Sabiendo que el coste diario de producción es de 200.000 PTAS. en cada planta, ¿cuántos días debe trabajar cada planta para que se cubran los objetivos comprometidos con el mínimo coste?

SOL: Se trabajara en la planta A 40 días y en la planta B 20 días con un mínimo costo de 12000000

2.3. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE EL MÉTODO SIMPLEX

Este método se fundamenta en encontrar una solución básica flexible a partir de la cual se va generando nuevas soluciones hasta encontrar la óptima (maximización o minimización).
Este método iterativo parte de un punto extremo conocido, permitiendo encontrar nuevos valores hasta satisfacer las condiciones de la función objetivo, las limitaciones y la no negatividad.
Existen tres requisitos en la solución de un problema de programación lineal por el método simplex.

a) Todas las limitaciones deben estar establecidas como ecuaciones
b) El segundo miembro de una limitante, no puede ser negativo:
c) Todas las variables están restringidas a valores no negativos
d)

Procedimiento.- Cuando un sistema reúne un número inferior de incógnitas en relación a las ecuaciones existen muchas soluciones. Este es el caso más frecuente en problemas de programación lineal y en virtud de ello se considera introducir variables de HOLGURA en los casos que la expresión es <=, restar variables de HOLGURA e introducir variables ARTIFICIALES en los casos de >= y sumar variables ARTIFICIALES en el caso de =.
Es decir:
Se aplica en las restricciones para Maximizar y Minimizar

$$\leq = +S(V.Ho\lg uras)$$
$$\geq = -S(V.Ho\lg uras) + t(V.Artificiales)$$
$$== +t$$

2.3.1 Maximización.

Introducción de Variables de Holgura

Como el primer miembro de la inecuación es inferior al otro, es necesario introducir una variable denominada de HOLGURA que cubra imaginariamente el valor faltante, para convertirlo en Igualdad.

$S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots S_n$= Variables de Holgura

$$a_{11}X_1. + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ---- + a_{1n}X_n + S_1 \qquad = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ---- + a_2nXn \qquad + S2 \quad = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ---- + a3nXn \qquad + S3 \quad = b_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + A_{m3}X_3 + ---- + AmXn + ------------Sn = b_n$$

Al convertir el sistema de desigualdades es un sistema de ecuaciones mediante la introducción de variables de holgura, se ha logrado un importante punto de partida. Estas variables en la función objetivo irán antepuestas de un coeficiente cero de beneficio

$Z(MAX) = C_1X_l + C_2X_2 + ---- + CnXn + 0S_1 + 0S_2 + ---- + 0Sn$

Generación de una solución básica factible

En el caso de un ejemplo de producción, el primer supuesto o alternativa del método simplex es no fabricar nada de los productos reales (variables fundamentales), esto quiere decir dar respuesta al sistema manteniendo inutilizados los recursos existentes, es decir:

$X_1 = 0$	$S_1 = b_1$
$X_2 = 0$	$S_2 = b_2$
$X_3 = 0$	$S_3 = b_3$
.	.
.	.
$X_n = 0$	$Sn = b_n$

En función de los criterios del método simplex se van obteniendo ensayos, interacciones o algoritmos hasta lograr la respuesta ideal.

El objetivo es ir eliminando las variables de holgura e irlas reemplazando por alternativas en función de variables fundamentales, propósito del problema.

El proceso se lo desarrolla por cuadros o etapas. Cada uno de ellas nos representará una mejor combinación de producción y un mayor beneficio, para lo cual se necesita aplicar el método matricial de coeficientes.

C j = Coeficiente de la (unción objetivo)

X j = Solución básica de cada Etapa: es la base vectorial que da solución al sistema

*= Elemento Pivote

0 = Elementos semipivotales

b_n = Parámetros; datos conocidos, nos indican la cuantificación de recursos

Zj = Valores que va tomando la función objetivo en cada posición.

Zj-Cj = Se la conoce como el "Criterio del simplex"; permite continuar o no la generación de alternativos.

Cuando la expresión Zj - Cj corresponde en todas las posiciones a valores POSITIVOS O CEROS. Habrá terminado el problema de maximización

Pasos para formar la nueva tabla Se elige el elemento (Zj-Cj) de menor valor negativo, la variable que le corresponde debe entrar a la base de la nueva tabla para mejorar la solución.

1) Para determinar que fila sale, se obtiene el elemento pivote, el mismo que es la intersección de la columna que ingresa y la fila que sale, para lo cual se divide los elementos de la columna de b_n para los elementos de la columna que ingresó, se escoge el menor cociente que representará al pivote, los restantes elementos de la columna son los semipivotes. No se toma en cuenta la división para números negativos o cero.

2) Formar los nuevos elementos de la fila de la variable de holgura que es reemplazada por la variable fundamental, basándose en el elemento PIVOTE, que se encuentra en la intersección de la columna que entra y' la fila que sale.

"ELENIENTOS DE LA NUEVA FILA " = $\frac{\text{ELEMENTOS ANTERIORES}}{\text{PIVOTE}}$

4) Los restantes elementos de la columna que entra se denominan SEMIPIVOTES

5) Los elementos de las demás filas se obtienen restando los elementos anteriores de dicha fila menos los elementos de la nueva fila que ingresó, multiplicados por el semipivote correspondiente

Elementos de otra fila = Elementos anteriores de dicha fila - elementos de la fila que ingresó x el semipivote correspondiente

6) **Zj** se obtiene multiplicando el coeficiente de la variable fundamental que ingresó por todos los elementos de dicha fila

7) Obtenemos la fila Zj - Cj, restando los elementos de la fila de Zj menos los elementos de la fila Cj, si todos sus elementos son positivos o ceros el proceso se ha, terminado, esto quiere decir que la tabla es óptima, caso contrario construimos la nueva tabla eliminando el menor negativa que exista y realizamos el mismo 'proceso anterior.

8) El máximo beneficio esta dado por el valor del elemento de Zj de la columna b_n,

PROBLEMA 1.

Un taller fabrica dos clases de cinturones de piel. En cada cinturón A de alta calidad gana 40 centavos y en cada cinturón B de baja calidad gana 30 centavos El taller puede producir diariamente 500 cinturones de tipo B o 250 cinturones de tipo A Solo se dispone de piel para 400 cinturones diarios A y B combinados y de 200 hebillas elegantes para el cinturón A y de 350 hebillas diarias para el cinturón B ¿Qué producción maximiza la ganancia?

Función Objetivo

$Z(MAX) = 40X_1 + 30\,X_2$

Restricciones

$X_1 + X_2 <= 400$ Cantidad de piel
$X_1 <= 200$ Hebillas elegantes
$X_2 <= 350$ Hebillas de menor calidad
$2X_1 + X_2 <= 500$ Capacidad
X_1 y $X_2 >= 0$

Variables de holgura

$Z(MAX) = 40X_1 + 30X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$

$X_1 + X_2 + S_1 = 400$
$X_1 + S_2 = 200$
$X_2 + S_3 = 350$
$2X_1 + X_2 + S_4 = 500$

TABLA I(SOLUCION INICIAL)

Formamos la 1^0 Tabla con los coeficientes de las variables fundamentales y su holgura, En la columna de Xj, irán las variables de holgura por ser recursos no utilizados por lo tanto deben ingresar al proceso y no tienen utilidad.

	Cj		40	30	0	0	0	0	
		Xj	X_1	X_2	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**b_n**
	0	S1	1°	1	1	0	0	0	400
←	**0**	**S2**	**1***	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**200**
	0	S3	0°	1	0	0	1	O	350
	0	S4	2°	1	0	0	0	1	500
		Zi	0	0	0	0	0	0	0
		Zj-Cj	-40	-30	0	0	0	0	

Al iniciarse el proceso productivo no existe utilidad por lo tanto todos los coeficientes de la fila Zj son ceros.

Los elementos de la fila Zj-Cj que se denomina criterio del simplex se forma restando los coeficientes de la fila Zj menos la 1° fila Cj

0 - 40 = -40   0 - 30 = -30   0 - 0 = 0   0 - 0 = 0 etc.

TABLA II

Como se trata de problemas de maximización, en la fila Zj - Cj deben quedar ceros o valores positivos, esto significa que es necesario eliminar los valores negativos para lo cual tomamos el menor valor negativo, en este caso (-40), es decir, la variable que pertenece a esta columna ingresa (X,) con una utilidad de 40

Para saber cuál es la fila que sale, divi jimos los coeficientes de la columna de (b_n) para los coeficientes de X,. El menor cociente indica la fila que debe salir y nos señalará el PIVOTE

$$\frac{b_n}{X_1} \qquad \frac{400}{1} = 400\ (1°)\ \text{Semipivote}$$

$$\frac{200}{1} = 200\ (0*)\ \text{Pivote}$$

$$\frac{350}{0} = \text{NO}\ (0°)\ \text{Semtpivote}$$

$$\frac{500}{2} = 250\ (2°)\ \textit{Semipivote}$$

Los divisores que son cero o negativos no se toman en cuenta para el menor cociente, pero si se los considera como semipivote.

El menor cociente es al dividir 200 / 1= 200 entonces en la intersección de la fila S_2 y la columna X_1 queda el pivote, los demás elementos son semipivote, lo cual significa que la fila que sale es S_2 y en su lugar ingresa X_1 con una utilidad de 40. Al pivote se lo representa por un asterisco (*) Y los semipivote con un punto (0).

Para obtener los coeficientes de la nueva fila dividimos los anteriores de S2 para el pivote.

200 + 1 = 200 (pivote = 1)
1 + 1 = 1
0 + 1 = 0
0 + 1 = 0
1 + 1 = 1
0 + 1 = 0
0 + 1 = 0

Las demás filas se las obtiene de la siguiente forma:

Coeficientes de S_1

ANTERIOR-NUEVA FILA x SEMIPIVOTE CORRESPONDIENTE

400 - 200x1 = 200
1-1x1=0
1-0x1=1
1-0x1=1
0-1 X 1 =-1
0- 0x1 =0
0- 0x1 =0

Primero se realiza la multiplicación, luego se resta

Cuando el semipivote es cero (0) se copia los mismos coeficientes

Si el semipovote es uno (1) se realiza la resta directamente

	Cj		40	30	0	0	0	0	
		Xj	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	b_n
	0	S_1	0	1°	1	-1	0	0	200
→	**40**	**X_1**	**1**	**0°**	**0**	**1**	**0**	**0**	**200**
	0	S_3	0	1°	0	0	1	0	350
←	0	S_4	0	1*	0	-2	0	1	100
		Zi	40	0	0	40	0	0	8000
		Zj-Cj	0	-30	0	40	0	0	

TABLA III

	Cj		40	30	0	0	0	0	
		Xj	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	b_n
	0	S_1	0	0	1	1*	0	-1	100
←	**40**	**X_1**	1	**0**	**0**	1°	**0**	**0**	200
	0	S_3	0	0	0	2°	1	-1	250
→	30	**x_2**	**0**	**1**	**0**	**-2°**	**0**	**1**	**100**
		Zi	40	30	0	-20	0	30	11000
		Zj-Cj	0	0	0	-20	0	30	

TABLA IV

	Cj		40	30	0	0	0	0	
		Xj	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	b_n
→	0	**S_2**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**-1**	**100**
	40	**X_1**	1	**0**	**-1**	0	**0**	**1**	100
	0	S_3	0	0	-2	0	1	1	50
	30	x_2	0	1	2	0	0	-1	300
		Zi	40	30	20	0	0	10	13000
		Zj-Cj	0	0	20	0	0	10	

En la fila Zj-Cj ya no hay valores negativos, entonces el proceso ha concluido. Para encontrar la solución tomamos las variables de la última columna Xi y los valores de la columna b_n.

Solución óptima

Z(MAX) = 13.000

X_1 = 100 Cinturones de clase A

X_2 = 300 Cinturones de clase B

S1 = 0 Se utilizó toda la piel

S2 = 100 Hebillas elegantes no utilizadas

S3 = 50 Hebillas de menor calidad no utilizadas

S4 = 0 Se utilizó toda la capacidad

Comprobación

$X_1 + X_2 + S_1 = 400$
$100 + 300 + 0 = 400$

$X_1 + S_2 = 200$
$100 + 100 = 200$

$X_2 + S_3 = 350$
$300 + 50 = 350$

$2X_1 + X_2 + S_4 = 500$
$2(100) + 300 + 0 = 500$
$200 + 300 + 0 = 500$

2.3.2 EL MÉTODO SIMPLEX EN LOS CASOS DE MINIZACION

Los casos de minimización se resuelven empleado también la metodología conocida del "Simplex", con algunas variaciones.

En los problemas de minimización se introduce variables de holgura con signo negativo y las variables artificiales con signo positivo.

Sj = Variables de holgura

mj = Variables artificiales

Las variables artificiales tienen un coeficiente (M) que es un valor indeterminado.

Cuando hay variables de holgura y artificiales, primero se eliminan las artificiales luego las de holgura.

Si la restricción es una igualdad, entonces se introduce solamente variables artificiales con signo positivo

Maximización (<=) + Sj
Minimización (>=) – Sj+mj
Igualdad (=) +mj

Para resolver un problema de minimización, se empieza eliminando los mayores valores positivos de la fila Zj-Cj. El proceso habrá concluido cuando en la fila Zj-Cj queden valores negativos o ceros.

La función objetivos se representará por Z(MIN) y las variables artificiales llevarán en esta función un coeficiente M

$Z(MIN) = ?X_1 + ?X_2 \text{ --- } + 0S_1 + 0S_2 + \text{ --- } + Mm_1 + Mm_2 \text{ --- } Mm_n$

Restricciones, variables de holgura y artificiales

$A_{11}X_1 + a_{12}X_2 - S_1 \quad + m_1 \quad = b_1$
$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \quad - S_2 \quad + m_2 \quad = b_2$
$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 \quad -S_3 \quad + m_3 \quad = b_3$

EJERCICIO

Se producen dos articulas A y B los mismos que son procesados por 3 máquinas M1, M_2 Y M3 que disponen de 130, 190, 200 horas semanales al menos, la M1, procesa 1 unidad de A y 1 de B, M_2 procesa 2 .de A y 1 de B, M3 procesa 1 de A y 4 de B. El costo de procesar es 2 dólares por cada unidad del articulo A y 3 dólares por cada unidad del artículo B. Cuántas unidades de A y B se deben procesar para que el costo sea mínimo

Función Objetivo

$Z(MIN) = 2X_I + 3X_2$

X_1 = Artículo A
X_2 = Artículo B

Restricciones

$X_1 + X_2 >= 130$ Capacidad de procesar de M_1
$2X_1 + X_2 >= 190$ Capacidad de procesar de M_2
$X_1 + 4X_2 >= 200$ Capacidad de procesar de M_3
$X_j >=$

Variables de holgura y Artificiales

$X_1 + X_2 - S_1 \quad + m_1 \quad = 130$
$2X_1 + X_2 \quad - S_2 \quad + m_2 \quad = 190$
$X_1 + 4X_2 \quad -S_3 \quad + m_3 \quad = 200$

$Z(MIN) = 2X_I + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S3 + Mm_1 + Mm_2 + Mm_3$

TABLA I

Para formar la tabla I utilizamos todos .Los coeficientes de las variables fundamentales, de holgura y artificiales.

Primero eliminamos las variables artificiales, las mismas que en la función objetivo irán con un coeficiente (M) que representa un valor indeterminado.

	Cj		2	3	0	0	0	M	M	M	
		Xj	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**m_1**	**m_2**	**m_3**	**b_n**
	M	m_1	1	1°	-1	0	0	1	0	0	130
	M	m_2	2	1°	0	-1	0	0	1	0	190
←	M	m_3	1	4*	0	0	-1	0	0	-1	200
		Zi	4M	6M	-M	-M	-M	M	M	M	520M
		Zj-Cj	4M	6M	-M	-M	-M	0	0	0	

Zj = M x 130 + Mx190 + Mx200
= 130M + 190M + 200M = 520M
=1xM+2xM+1xM
= M + 2 M + M = 4M
= 1 xM + 1 x M + 4M =
= M + M + 4M = 6M etc.
= -1 M + OM + M = -M

Zj-Cj = Quedan los mismos valores que Zj excepto las 3 columnas últimas porque si se pueden restar.

TABLA II

Cuando la función objetivo es de minimización, de la fila Zj-Cj se debe eliminar los valores positivos, empezando por el mayor, en este caso 6M, de modo que ingresa X_2 con un costo de 3, para saber que fila sale procedemos como en los problemas de maximización

$\frac{B_n}{X_2} = \frac{130}{1} = 130$; $\frac{190}{1} = 190$; $\frac{200}{4} = 50$ (menor cociente)

Semipovote semipivote pivote

Sale m_3 e ingresa X_2, luego el proceso similar a la maximización.

Cj		2	3	0	0	0	M	M	
	Xj	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**m_1**	**m_2**	**b_n**
M	m_1	0.75°	0	-1	0	0.25	1	0	80
M	m_2	1.75*	0	0	-1	0.25	0	1	140
3	X_2	0.25°	1	0	0	-0.25	0	0	50
	Zi	2.5M	0M	-M	-M	0.5M	M	M	220M
	Zj-Cj	2.5M	0M	-M	-M	0.5M	0	0	

TABLA III

Cj		2	3	0	0	0	M	
	Xj	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**m_1**	**b_n**
M	m_1	0	0	-1	0.43*	0.15	1	20
2	X_1	1	0	0	-0.57°	0.14	0	80
3	X_2	0	1	0	0.14°	-0.28	0	30
	Zi	0M	0M	-M	0.43M	0.15M	M	20M
	Zj-Cj	0M	0M	-M	0.43M	0.15M	0	

TABLA IV

Cj		2	3	0	0	0	
	Xj	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**b_n**
M	S_2	0	0	-2.33	1	0.35	46.5
2	X_1	1	0	-1.33	0	0.34	106.5
3	X_2	0	1	0.33	0	-0.33	23.5
	Zi	2	3	-1.67	0	-0.31	238.5
	Zj-Cj	0	0	-1.67	0	-0.31	

En la fila Zj-Cj que se denomina criterio del simplex, tenemos valores negativos o ceros entonces e: proceso ha terminado.

Solución Optima

Z(MIN) = 183,5

X_1 = 106,51 Unidades del artículo A

X_2 = 23,5 Unidades del artículo B

S_1 = 0 Se utilizó toda la capacidad de M_1

S2 = 46,5 Capacidad no utilizada de M_2

S3 = 0 Se utilizó toda la capacidad de M_3

Comprobación:

X1	+	X2	- Sl	= 130
106,5	+	23,5	0	=130
$2X_1$	+	X_2	- S2	=190
2(106,5)	+	23,5	- 46,5	=190

2.4 TAREAS PROPUESTAS

Resolver los siguientes problemas utilizando el método simplex (DURACION ESTIMADA 15 HORAS)

1.- Una fabrica elabora tres tipos de tornillos: grandes medianos y pequeños de los cuales se debe producir no más de 800000 tornillos grandes y entre medianos y pequeños no más de 1000000 para satisfacer las demandas de las siguientes 4 semanas.
Estos tornillos se pueden producir en una maquina que está disponible 80 horas a la semana.
Los

	Tornillos Grandes	Tornillos Medianos	Tornillos Pequeños
Precio de venta(Precio/Libra)	32.50	27.50	20.50
Costo de maquina(Precio/libra)	8.20	7.75	6.25
Tiempo de maquina	2 horas	1.5 horas	1.4 horas

requerimientos de costo y tiempo son:
Cada libra contiene 40 grandes, 50 medianos, ó 60 pequeños. Los trabajadores laboran en dos turnos y perciben un sueldo que no afecta al precio del tornillo. Halla la fórmula matemática y la mejor mezcla para mejorar la utilidad.
Nota: Utilidad por libra = Precio de venta – Costo de máquina.

2.- Disponemos de 210.000 dólares para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las de tipo A, que rinden el 10 % y las de tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 dólares en las de tipo A y como mínimo 60.000 dólares en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las de tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Solución A=130000, B=80000

3.- Maximizar Z = 30X1 + 10X2 + 5X3
Sujeto a:
2X1 + 4X2 + X3 <= 90
X1 + X2 + 2X3 <= 35
8X1 + 6X2 + 3X3 <= 180

4. - El tratamiento de cierta enfermedad requiere la administración de dos complejos vitamínicos, **Cl** y C2. Cada semana es preciso consumir al menos 450 mg de **Cl** y 200 mg de *C2.* Estos complejos se presentan en dos comprimidos diferentes. El comprimido de color rojo que cuesta 25 pesetas la unidad y que contiene 15 mg de **Cl** y 25 mg de C2 y el comprimido de color azul que también cuesta 25 pesetas la unidad y que contiene 28 mg de **Cl** y 10 mg de C2. ¿Cuántos comprimidos de cada color debe tomar un individuo en una semana para que el coste del tratamiento sea mínimo?

Solución:

5. Una fábrica de carrocerías de automóviles y camiones tiene 2 naves. En la nave A, para hacer la carrocería de un camión, se invierten 7 días-operario, para fabricar la de un coche se precisan 2 días-operario. En la nave B se invierten 3 días-operario tanto en carrocerías de camión como de coche. Por limitaciones de mano de obra y maquinaria, la nave A dispone de 300 días-operario, y la nave B de 270 días-operario. Si los beneficios que se obtienen por cada camión son de 6 millones de pesoso y de 3 millones por cada coche. ?Cuántas unidades de cada clase se deben producir para maximizar las ganancias?

Sol: Hay que fabricar 24 camiones y 66 coches para un beneficio máximo de 342 millones de pesos.

6.- Un comerciante de Frutas transporta sus productos en un camión que tiene capacidad de 800 cajas de frutas. El debe transportar al menos 200 cajas de naranja que le rendirán 20 dólares por caja, al menos 100 toronjas que le rendirán 10 dólares por caja y cuando mucho 200 de mandarinas con 30 dólares de ganancia por caja Como debe distribuirse el camión para tener una máxima ganancia.

Solución: 500 cajas de naranjas, 100 cajas de toronjas y 200 cajas de mandarinas.

2.5. LA DUALIDAD.

Asociados a u problema de programación lineal, existe otro problema que tiene una intima relación con el primero. Al problema original se le denomina ***Primal*** y al otro ***Dual.***

Un problema inicial (**Primal**) tiene la siguiente forma.

F.O:

Z (MAX) = C1X1 + C2X2 + C3X3

RESTRICCIONES:

a11X1 + a12X2 + a13X3 +..................... + a1nXn <= b1

a21X1 + a22X2 + a23X3 + ... + a2nXn <= b2

a31X1 + a32X2 + a33X3 + ... + a3nXn <= b3

Zj>=0

El problema Dual correspondiente tendrá la siguiente forma.

F.O:

Z(MIN) = b1Y1 + b2Y2 + b3Y3

RESTRICCIONES:

a11Y1 + a21Y2 + a31Y3 +..................... + an1Yn >= C1

a12Y1 + a22Y2 + a32Y3 + ... + an2Yn >= C2

a13Y1 + a23Y2 + a33Y3 + ... + an3Yn >= C3

Yj>=0

Relaciones entre el Primal y el Dual.

Primal		**Dual**
Coeficientes de las variables de la F. Objetivo	→	Recursos
Recursos	→	Coeficientes de las variables de la F. Objetivo
Maximización	→	Minimización
<=	→	>=
Fila i	→	Columna j
Columna i	→	Fila j

Ventajas del Dula.-

La obtención del problema dual es importante cuando el número de restricciones es mucho mayor que el número de incógnitas o variables, ya que de esta manera se reduce la cantidad de operaciones que hay que realizar para resolver el modelo.

Ejemplo: un problema primal con 30 restricciones y 5 ecuaciones:

Primal	Dual
30 ecuaciones	5 ecuaciones
5 variables	30 variables
30 variables de Holgura	5 variables de Holgura y 5 Artificiales

Un caso concreto de Dualidad será:

Primal:

Z(MAX)= 80X1 + 60X2

sujeto a:

$$\begin{aligned} X1 + X2 &\leq 800 \\ X1 \quad &\leq 400 \\ X2 &\leq 700 \\ 2\,X1 + X2 &\leq 1000 \end{aligned}$$

Con: X1, X2 ≥ 0

Dual:

Z(MIN)= 800Y1 + 400Y2 + 700Y3 + 1000Y4

sujeto a:

$$\begin{aligned} Y1 + \quad Y2 \qquad\qquad 2Y4 &\geq 80 \\ Y1 + \qquad\qquad Y3 + \quad Y4 &\geq 60 \end{aligned}$$

Con: Y1, Y2 , Y3, Y4 ≥ 0

Propiedades del Dual.

Si el problema dual tiene una solución factible óptima, entonces el problema dual correspondiente tendrá una solución factible óptima con el mismo valor de la función objetivo.

Para una comprobación experimental resolvamos el problema anterior:

Los resultados por el simplex del dual serán:

Iteración final de la minimización:

Vh	Y1	Y2	Y3	Y4	S1	S2	bm
Y1	1	-1	2	0	1	-2	40
Y4	0	1	-1	1	-1	1	20
Z	0	-200	-100	0	-200	-600	52000

Iteración final de la maximización:

Vh	X1	X2	S1	S2	S3	S4	bm
S2	0	0	1	1	0	-1	200
X1	1	0	-1	0	0	1	$\boxed{200}$
S3	0	0	-2	0	1	1	100
X2	0	1	2	0	0	-1	$\boxed{600}$
Z	0	0	40	0	0	20	52000

Observe que el Z(max) es igual al Z(min).

El valor absoluto de los coeficientes de las variables de Holgura en la solución optima primal, son los valores óptimos de las variables duales, y viceversa.

Como se puede verse en las tablas óptimas,

$| Z3 | = 40 = Y1$ y $| Z6 | = 20 = Y4$

$| Z4 | = 0 = Y2$ y $| Z5 | = 0 = Y3$

UNIDAD TRES

MODELO DE TRANSPORTE

3.1. GENERALIDADES

Son problemas especiales de Investigación Operativa que tienen su origen en la necesidad de transportar productos desde varias fuentes de suministro u orígenes a varios sectores de demanda o destino, entre los problemas más comunes están los de distribución y los de asignación.

En los Problemas de Distribución consisten en minimizar los costos que demanden en transportar los productos desde diferentes orígenes a los diferentes destinos en donde: F1, F2, F3,……., etc, son las fuentes de suministro, los orígenes o las ofertas. Y B1, B2, B3,……….., etc, son los destinos o sectores de demanda. Si hay suficientes recursos se satisfacen todas las demandas.

Los costos están dados por la distancia entre el origen y el destino. Estos vienen dados en forma de matriz como la siguiente:

<table>
<tr><td rowspan="2">j
i</td><td colspan="4">DESTINOS(Almacén)</td><td rowspan="2">CAPACIDAD DE SUMINISTRO (OFERTA)</td><td rowspan="2">……bj</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>B2</td><td>B3</td><td>B4</td></tr>
<tr><td>ORIGENES (Fabrica) F1</td><td>C11</td><td>C12</td><td>C13</td><td>C14</td><td>S1</td><td></td></tr>
<tr><td>F2</td><td>C21</td><td>C22</td><td>C23</td><td>C24</td><td>S2</td><td></td></tr>
<tr><td>F3</td><td>C31</td><td>C32</td><td>C33</td><td>C34</td><td>S3</td><td></td></tr>
<tr><td>REQUERIMIENTOS (DEMANDA)</td><td>D1</td><td>D2</td><td>D3</td><td>D4</td><td></td><td>…..Dj</td></tr>
<tr><td>.
.
.
Fi</td><td colspan="4">. . .
. . .
. . .
Cij Xij</td><td>.
.
.
Si</td><td></td></tr>
</table>

C11, representa el costo desde F1 hasta B1

X11, representa la cantidad que transportamos desde F1 a B1.

En forma de ecuaciones tendremos:

Función Objetivo.

Z(MIN)= C11X11 + C12X12 + C13X13 + C14X14 +
C21X21 + C22X22 + C23X23 + C24X24 +
C31X31 + C32X32 + C33X13 + C34X34 +

Z(MIN)= C11X11 + C12X12 + C13X13 + ……… + CmnXmn

Restricciones

1.- En cuanto a la capacidad de suministro.

X11 + X12 + X13 + X14 = S1

X21 + X22 + X23 + X24 = S2

X31 + X32 + X13 + X34 = S3

2.- En cuanto a los requerimientos de demanda.

X11 + X21 + X31 = D1

X12 + X22 + X32 = D2

X13 + X23 + X33 = D3

X14 + X24 + X34 = D4

Se pueden presentar tres casos en este tipo de problemas.

a) Si la capacidad de suministro es igual a los requerimientos se dice que se tiene un problema de transporte Homogéneo.
b) Si la capacidad de suministro es mayor a la demanda, se debe crear un destino ficticio que consuma el exceso del producto suministro.
c) Si la demanda es mayor que el suministro se debe crear un suministro ficticio que genere el suministro necesario para cubrir la demanda insatisfecha.

3.2. MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE LA ESQUINA NOROESTE.

Para conocer este método partiremos de un ejercicio. Un problema clásico de este tipo es el siguiente: Dos fabricas F1 y F2, producen 40 y 50 unidades respectivamente de un determinado producto. Estas fábricas deben abastecer a tres centros de consumo, que necesitan 20, 45 y 25 unidades, respectivamente. Los costos de transportar de cada fábrica a cada centro de consumo están dados en la siguiente tabla.

FABRICAS	**CENTROS ED CONSUMO**		
	C1	**C2**	**C3**
F1	500	1000	1500
F2	1000	750	1400

¿Cómo han de distribuirse las unidades del producto para que el costo sea el mínimo posible?

Lo primero que se debería hacer es establecer los datos del ejercicio y especificar si se trata o no de un problema homogéneo.

FABRICAS	**CENTROS ED CONSUMO**			**Suministro**
	C1	**C2**	**C2**	
F1	500	1000	1500	40
F2	1000	750	1400	50
DEMANDA	20	45	25	90 90

El problema es homogéneo

Los pasos siguientes nos permiten la resolución del problema.

1. Determinar la Función Objetivo y las Restricciones del Problema.

$$Z(Min) = 500X_{11} + 1000X_{12} + 1500X_{13}$$
$$+ 1000X_{21} + 750X_{22} + 1500X_{23}$$

Suministro (Orígenes):

$(F1): X_{11} + X_{12} + X_{13} = 40$

$(F2): X_{21} + X_{22} + X_{23} = 50$

Demanda (Destinos)

$(C1): X_{11} + X_{21} = 20$

$(C2): X_{12} + X_{22} = 45$

$(C3): X_{13} + X_{23} = 25$

2. Encontrar una Solución Inicial.

Como Cualquier problema de Programación Lineal. Lo Primero es buscar una solución que satisfaga las restricciones del problema, es decir debemos asignar una cantidad del producto que envié cada fabrica a los centros de consumo aun cuando el costo total no sea el mínimo.

Esta solución debe incluir m+n-1 variables no nulas (básicas). Con el método de la Esquina Noroeste consiste en asignar el máximo posible de unidades en la primera casilla (C11), De esta forma se completa la columna o fila correspondiente, se prosigue con la fila o columna siguiente que no este satisfecha en el casillero siguiente, y de esta forma se trata de completar cada una de las filas y columnas.

[redacted]

En la solución inicial deben figurar, m+n-1 cantidades asignadas (casilleros llenos), siendo m el número de filas y n el número de columnas. Se debe diferenciar los costos de las unidades asignadas, por tal motivo los costos se remarcan en un recuadro.

Numero de casilleros llenos = m+n-1=2+3-1=4

Se calcula el costo con esta primera solución.

Z1=500*20+1000*20+750*25+1400*25=83750 $

3. Evaluar y Mejorar la Solución (Solución Óptima)

Para conocer si la solución obtenida es óptima se requiere hallar X_{ij} de cada ruta no utilizada denominadas también Variables no Básicas.

3.1. Encontrara los valores marginales de cada fila (vi) y de cada columna (wj), a través de resolver el sistema $C_{ij} = v_{ij} + w_{ij}$, tal que esta ecuación indica que la suma sea exactamente igual al costo que aparece en el cruce de la fila y columna a la que pertenece. Se asigna en cualquiera de los valores un valor concreto (usualmente vj=o), para obtener una solución particular del sistema y por sustitución progresiva obtener dos únicas variables en cada ecuación, como se muestra a continuación.

	C1	C2	C3		
F1	500 20	1000 20	1500	40	v1=250
F2	1000	750 25	1400 25	50	v2=0
	20	45	25		
	w1=250	w2=750	w3=1400		

Sistema de ecuaciones:

$$C_{23} = v_2 + w_3$$
$$1400 = 0 + w_3$$
$$w_3 = 1400$$

$$C_{12} = v_1 + w_2$$
$$1000 = v_1 + 750$$
$$v_1 = 250$$

$$C_{22} = v_2 + w_2$$
$$750 = 0 + w_2$$
$$w_2 = 750$$

$$C_{11} = v_1 + w_1$$
$$500 = 250 + w_1$$
$$w_1 = 250$$

3.2. Efectivamente a través de la diferencia entre el segundo y el primer miembro de cada sistema encontraremos los valores xij correspondientes a las variables básicas.

$$X_{ij} = C_{ij} - (v_{ij} + w_{ij}) --> X_{ij} = C_{ij} - v_{ij} - w_{ij}$$

Los valores de los casilleros vacíos (variables no básicas) serian los siguientes:

	C1	C2	C3		
F1	500 20	1000 20	1500 (-150)	40	v1=250
F2	1000 (750	750 25	1400 25	50	v2=0
	20	45	25		
	w1=250	w2=750	w3=1400		

$$X_{13} = C_{13} - v_1 - w_3 \qquad X_{21} = C_{21} - v_2 - w_1$$
$$X_{13} = 1500 - 250 - 1400 \qquad X_{21} = 1000 - 0 - 250$$
$$X_{13} = (-150) \qquad X_{21} = (750)$$

Si los valores de las variables no básicas son mayores o iguales a cero (Xij>=0) la solución es optima caso contrario hay que continuar con el proceso de mejorar la solución. Reasignar nuevamente las cantidades en las diferentes rutas tomando siempre la ruta de valor mínimo en nuestro caso (-150), por ende la ruta a elegir seria la (1,3) que es donde se empezara a sumar una constante θ. Sin embargo al asignar a la casilla (1,3) la cantidad de θ se altera la suma de la fila 1 y de la columna 3 por lo tanto se debe restar θ de un elemento de la misma columna y restarle θ a un elemento de la misma fila. El procedimiento de asignar θ debe continuar de tal forma que no altere todas las filas y columnas formando polígonos de secuencia como se muestra a continuación.

	C1	C2	C3
F1	20	20 (-θ)	(+θ)
F2		(+θ) 25	(-θ) 25

Luego se deducirá el valor de θ tomando el menor valor donde se aplico la resta de θ, en nuestro caso θ=20
3.3. La Nueva Iteración será el reemplazo de del valor de θ en las rutas que fueron asignadas

	C1	C2	C3	
F1	500 20	1000	1500 20	40
F2	1000	750 45	1400 5	50
	20	45	25	

Se calcula el nuevo valor de Z, y el proceso continua para determinar si la nueva solución es o no optima o hasta encontrar una solución optima.

Z2= 500*20+1500*20+750*45+1400*5=44750 $

	C1	C2	C3		
F1	500 20	1000 (150	1500 20	40	v1=100
F2	1000 (600	750 45	1400 5	50	v2=0
	20	45	25		
	w1=400	w2=750	w3=1400		

Como se puede observar la nueva solución es la óptima ya que todo sus valores de las variables no básicas son positivas.

La interpretación de la solución:

La fabrica 1 deberá transportar 20 unidades al centro de consumo C1 a un costo unitario de 500 $

La fabrica 1 deberá transportar 20 unidades al centro de consumo C3 a un costo unitario de 1500 $

La fabrica 2 deberá transportar 45 unidades al centro de consumo C2 a un costo unitario de 750 $

La fabrica 2 deberá transportar 5 unidades al centro de consumo C3 a un costo unitario de 1400 $

El costo total de transporte es de 44750 $.

3.3. MÉTODO DE RESOLUCIÓN DEL COSTO MÍNIMO.

Para resolver un ejercicio por el método del costo mínimo en la solución inicial se selecciona la celda que tiene menor costo. En la celda seleccionada haga un envió al mínimo del suministro y la demanda para la fila y la columna que contiene la celda escogida. Luego hay que determinar si esta solución es optima caso contrario hay que generar nuevas soluciones y seguir el mismo procedimiento que el método de la esquina noroeste.

UNIDAD CUATRO

PROGRAMACIÓN PERT/TIEMPO – CPM/RUTA CRÍTICA

4.1. GENERALIDADES PERT y CPM están basados sustancialmente en los mismos conceptos, aunque representan algunas diferencias fundamentales. Primero, según fueron desarrollados originalmente, los métodos PERT estuvieron basados en estimaciones probabilísticas de la duración de actividades, lo cual dio por resultado una ruta probabilística a través de una red de actividades y un tiempo probabilista de terminación del proyecto. Los métodos CPM, por su parte, suponen tiempo de actividades constantes o deterministas.

La conceptualización del sistema de actividades como una red vino a constituir un paso importante en el análisis de los sistemas de producción en gran escala. El concepto del flujo a través de la red se centra en factores importantes de la programación, como son la interacción entre la duración respectiva de las actividades, sus fechas de iniciación más próxima y más distante y la secuencia que se requiere en la producción.

4.2. TERMINOLOGÍA

Definición.- Es una técnica de planificación que utiliza un modelo matemático

PERT (Técnicas para la Revisión y Evaluación de Proyectos)
Permite optimizar el tiempo de un proyecto con la utilización adecuada de recursos.
Planificar, evaluar y realizar correctivos de un proyecto sobre la marcha en menor tiempo y costo.
CPM (Método de un Ruta Crítica)
Permite determinar la ruta que permita establecer la duración del proyecto.

4.3. GRAFICA DE GANTT COMO ANTECEDENTE DEL PERT*.-* Es una técnica que nos permitirá medir la duración total de un proyecto o de sus actividades individuales.

Esta técnica se aplica para:

- Medir las cargas de trabajo departamentales
- Medir el volumen de trabajo de maquinaria y equipos
- Aplicaciones de Proyectos

La gráfica de GANTT muestra la relación entre los eventos significativos de la misma actividad pero no las relaciones entre los eventos de las diferentes actividades.

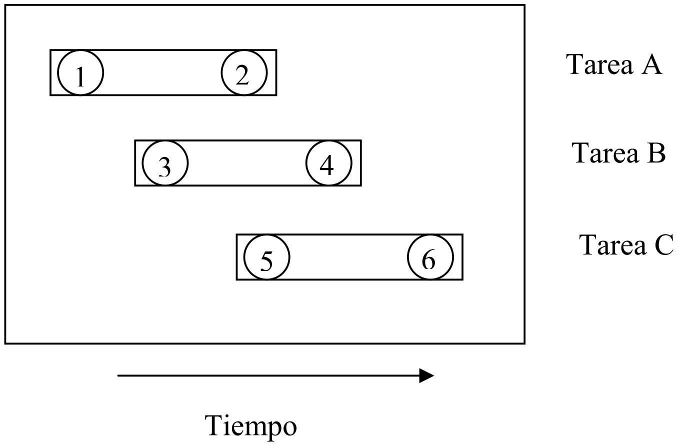


Fig1. GRAFICA DE GANNT DE EVENTOS SIGNIFICATIVOS

La escala de tiempo puede ser en semanas, días, meses, etc.

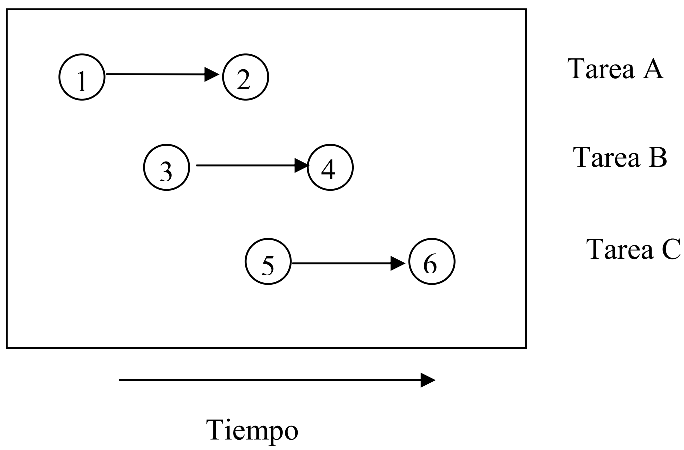


Fig2. GRAFICA DE GANNT, REMOCION DE LOS RECTANGULOS PARA REMPLAZAR POR FLECHAS

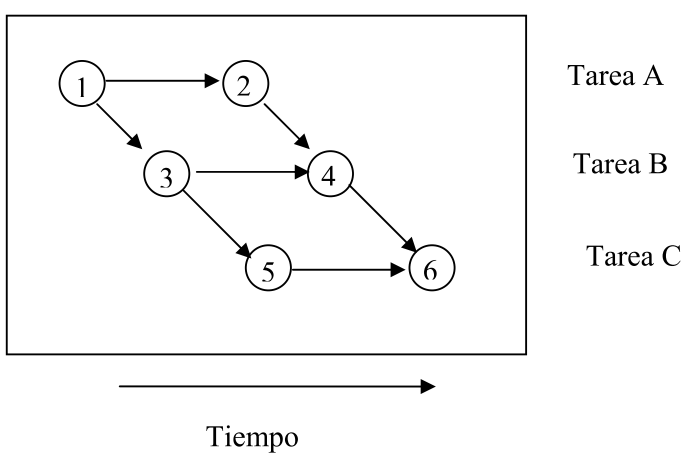


Fig3. GRAFICA DE GANNT, MUESTRA LA RELACIÓN DE EVENTOS DE UNA MISMA ACTIVIDAD Y ENTRE ACTIVIDADES

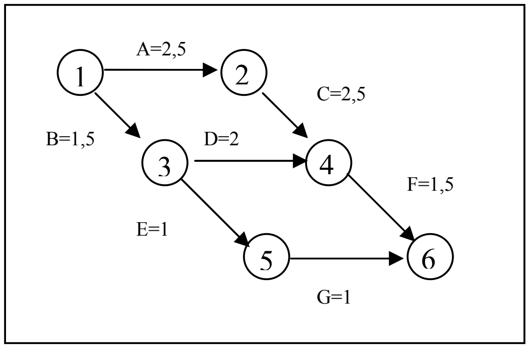


Fig4. TRANSFORMACION COMPLETA DE LA GRAFICA DE GANTT A LA RED PERT

Se elimina la denominación de tares y se incluye dentro de la flecha, se eliminan las escalas de tiempo y se incluyen los tiempos individuales de cada flecha.

4.4. RED PERT.-

Definición.- Es una técnica que nos permite planificar la consecución de un objeto de un proyecto en general.

No solo es planificación si no también se puede medir el avance de su proyecto u objeto.

Una vez evaluado se puede tomar decisiones y tomar correctivos, permite planificar y mejorar lo planificado

Aplicaciones.-

- Construcción
- Desarrollo de sistemas informáticos
- Controles y auditorias financieras
- Instalación de plantas industriales

Requisitos para la aplicación de Red PERT.- Los proyectos deben cumplir:

- Proyectos grandes que tengan gran cantidad de actividades
- Que sean proyectos dinámicos, que estén sujetos a cambios continuos
- Proyectos por lo general de gran inversión económica (costosos)
- En proyectos urgentes

Proyectos no aplicables (Donde no se puede usar PERT)

- En proyectos que tengan una trayectoria lineal u horizontal
- Proyectos que sean pequeños

Ventajas.-

- Conocer el tiempo de inicialización y finalización del proyecto
- Saber el tiempo y costo mínimo de un proyecto
- Permite una flexibilidad y un refinamiento en los proyectos.

Terminología.-

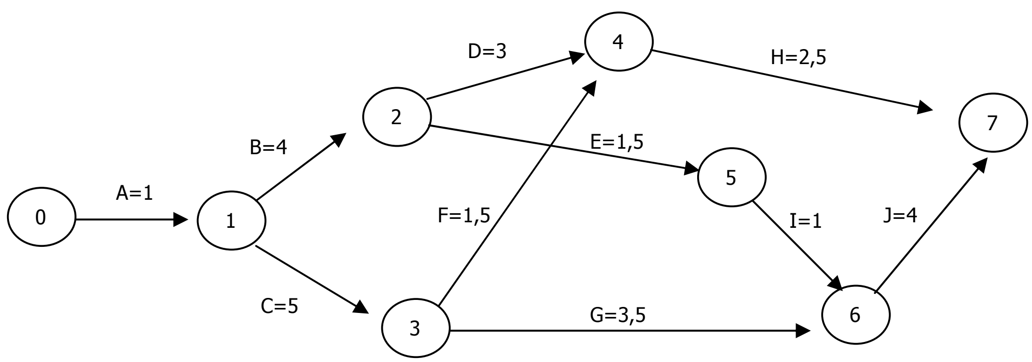


Fig5. RED PERT

a) Actividades.-

- Están representadas por una flecha
- No importa la magnitud de la flecha ni su dirección
- Lo importante es la secuencia o la relación de las actividades
- Toda actividad tiene duración y es una parte del proyecto

b) Eventos.-

- Están representados por círculos
- Los eventos no tienen duración, llamados también Hitos
- Permiten marcar puntos en el tiempo
- Existen eventos iniciales y finales
- Se les asigna un número

Enumeración de Eventos

Existen **normas** para enumerar los eventos:

- Es preferible enumerar de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo
- El evento de finalización debe ser mayor al de inicio

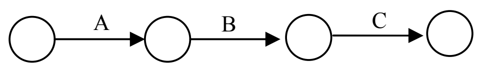
Existen reglas para enumerar eventos:

Para enumerar un evento deberá enumerarse antes los eventos que están en los extremos de las flechas o de las actividades que concurren o llegan a dicho evento.

c) Relaciones.-

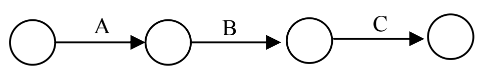
La grafica permite establecer claramente la secuencia de las relaciones y estas pueden ser:

PRECEDENCIA O ANTECEDENCIA



- A la actividad A no le antecede ninguna actividad
- A la actividad B le antecede la actividad A
- A la actividad C le antecede la actividad B
- ¿Que actividades llegan al inicio de la actividad en referencia?

SECUENCIA

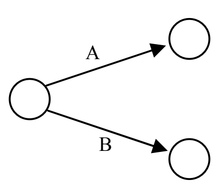


- A la actividad A le sigue la actividad B
- A la actividad B le sigue la actividad C
- A la actividad C le no le sigue ninguna actividad
- ¿Que actividades salen del final de la actividad en referencia?

CONCURRENCIA

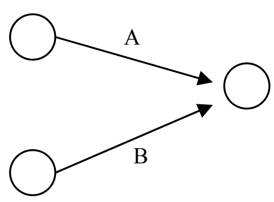
SALIDA

A y B salen del mismo evento



LLEGADA

A y B llegan al mismo evento



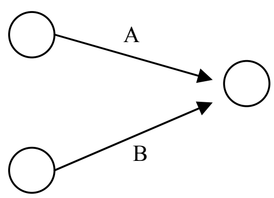
d) Actividades Ficticias

- No tienen duración o su tiempo de duración es igual a cero
- Es un artificio gráfico, sirve para representar relaciones complejas en una RED

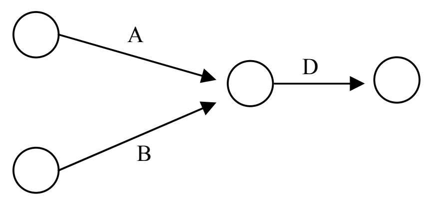
Ejemplo: Condiciones de las relaciones.

1. A Y B son concurrentes de llegada
2. a D le antecede Ay B
3. C y D tienen concurrencia de salida
4. a C le antecede solo A

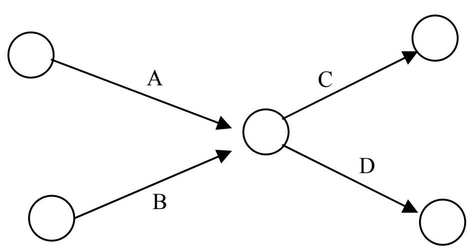
1.



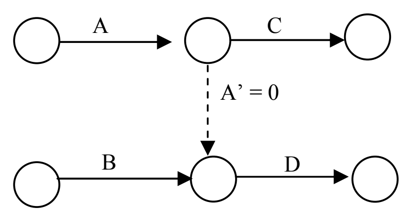
2.



3.



4.



4.5. PERT/TIEMPO.-

Es importante el cálculo de tiempos estimados para cada una de las actividades del proyecto para determinar la duración total del mismo y así tener la aceptación o la negación de su realización.

Tiempo Esperado (Te).- Es el tiempo de duración de cada actividad y estos tiempos son proporcionados por especialistas en cada una de las materias.
Se obtiene a través de estadística y la probabilidad (BETA)

Te = (a + 4m + b) / 6

Donde:

a = Tiempo más optimista, es el tiempo en que puede durar una actividad en las mejores condiciones posibles.

b = Tiempo más pesimista, que es el tiempo más largo que puede demorarse una actividad en las peores condiciones posibles.

m = Tiempo más probable o medio, es el tiempo en el que puede desarrollarse una actividad en condiciones normales.

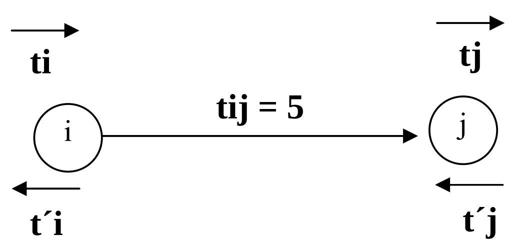
Ejemplo:

a = 4 h	Te = (4 + 4*8 +16)/6
m = 8 h	Te = 8,7 h
b = 16 h	

Tiempos Más Próximos y Más Tardíos de una actividad.-

Tiempo Más Próximo.- Es la fecha más temprana de inicio de la actividad y se calcula de izquierda a derecha o del inicio al final

Tiempo Más Tardío.- Es fecha más lejana del inicio de una actividad, se calcula del final al inicio.



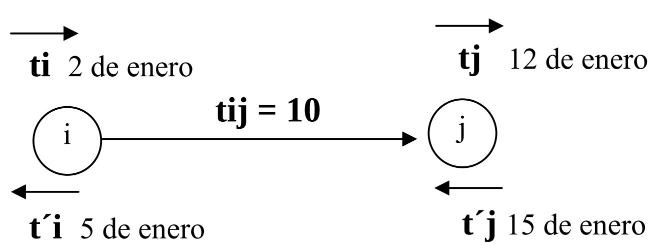
ti = tiempo más próximo de inicio

t´i = tiempo más tardío de inicio

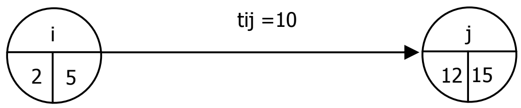
t j = tiempo más próximo de finalización

t´j = tiempo más tardío de finalización

Ejemplo:



En la RED:



Tiempo de Eventos.-

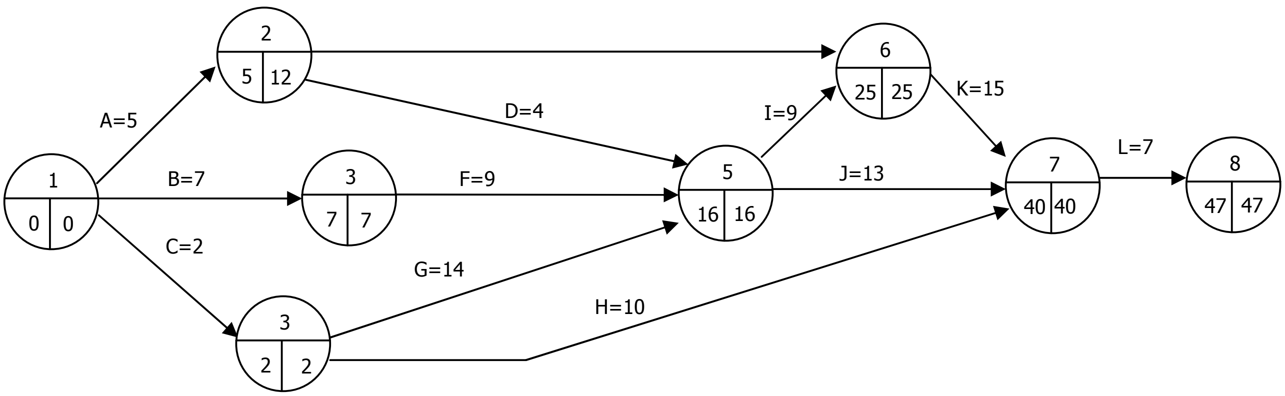


FIG 6. TIEMPOS DE EVENTOS

Tiempo más próximo a un Evento.- Es el que ocurrirá si las actividades que lo preceden comienzan lo más pronto posible.

ti= Máximo valor de los tiempos resultantes de la suma de ti+ tij

max(ti + tij)

Cálculo de tiempos más próximos

Evento	Evento inmediato anterior	Tiempo más próximo + Tiempo de la Actividad	Máximo=Tiempo mas próximo
1	---	----	0
2	1	0+5	5
3	1	0+7	7
4	1	0+2	2
5	2 3 4	5+4 7+9 2+14	16
6	2 5	5+8 16+9	25
7	4 5 6	2+10 16+13 25+15	40
8	7	40+7	47

Tiempo más tardío a un Evento.- Es el último momento en el que puede ocurrir sin retrasar la terminación del proyecto más allá de su tiempo más próximo.

t´j = Mínimo valor de los tiempos resultantes de la diferencia de t´j - tij

min(t´j - tij)

Cálculo de tiempos más tardío

Evento	**Evento inmediato anterior**	**Tiempo más tardío - Tiempo de la Actividad**	**Mínimo=Tiempo mas tardío**
8	---	----	47
7	8	47-7	40
6	7	40-15	25
5	7 6	40-13 25-9	 16
4	7 5	40-10 16-14	 2
3	5	16-9	7
2	6 5	25-8 16-4	 12
1	4 3 2	2-2 7-7 12-5	0

Ruta Crítica (De eventos).- La Ruta Crítica de una Red es la ruta de tiempo más largo a través de la misma, es decir donde el tiempo más próximo es igual al tiempo más tardío.

RC1 = 1-3-5-6-7-8

RC2 = 1-3-5-7-8

RC3 = 1-4-5-6-7-8

RC1 = 1-4-5-7-8

Holgura de Eventos Y Holgura de Actividades.-

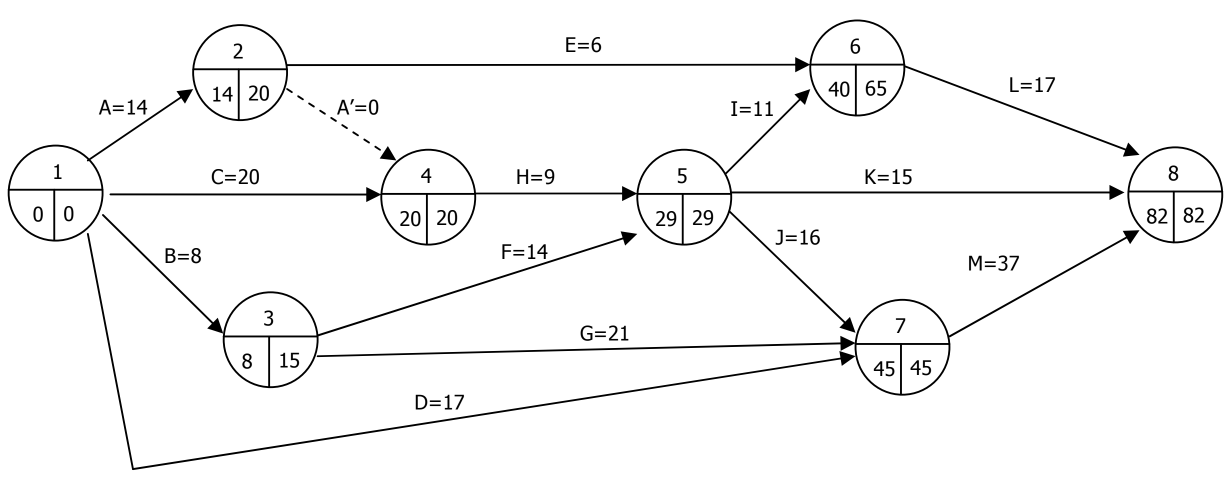


FIG 7. HOLGURA DE EVENTOS Y ACTIVIDADES

RC1= 1-4-5-7-8

RC2= 1-4-5-8

RC2= 1-7-8

Holgura de Eventos.- Es la diferencia entre el tiempo más tardío menos el tiempo más próximo de un evento.

Ejem: t3 = 8

t´3 = 15 Hi = 15-8

Hi = t´i – ti

EVENTO	t´i	ti	Hi	SITUACIO	
				C	NC
1	0	0	0	X	
2	20	14	6		X
3	15	8	7		X
4	20	20	0	X	
5	29	29	0	X	
6	65	40	25		X
7	45	45	0	X	
8	82	82	0	X	

Holgura de Actividades.- Se define como la flexibilidad de realización de ciertas actividades, cuando una actividad puede iniciar lo más pronto posible o concluir lo más tarde posible.

Hij = t´j – { ti + tij }

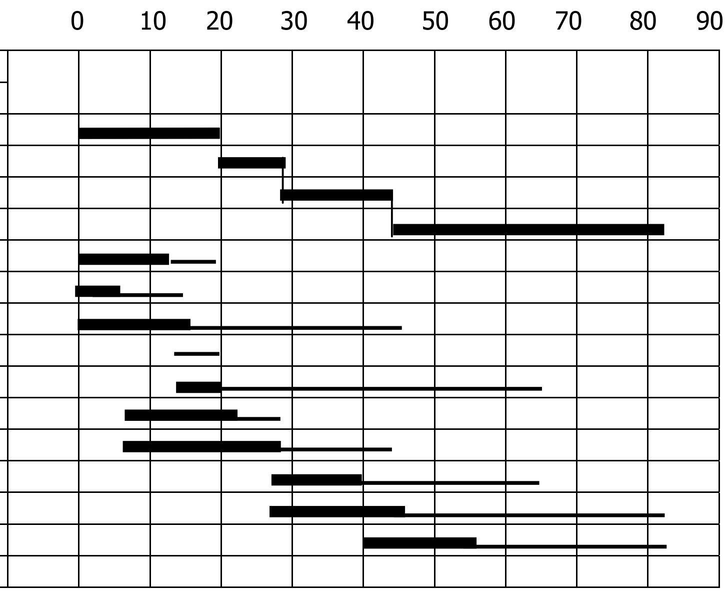
ACTIVIDADES		tij	ti	t´j	t´j – { ti + tij }	Hij	SITUACION	
Código	(i,j)						C	NC
A	1,2	14	0	20	20-{0+14}	6		X
B	1,3	8	0	15	15-{0+8}	7		X
C	1,4	20	0	20	20-{0+20}	0	X	
D	1,7	17	0	45	45-{0+17}	28		X
A’	2,4	0	14	20	20-{14+0}	6		X
E	2,6	6	14	65	65-{14+6}	45		X
F	3,5	14	8	29	29-{8+14}	7		X
G	3,7	21	8	45	45-{8+21}	16		X
H	4,5	9	20	29	29-{20+9}	0	X	
I	5,6	11	29	65	65-{29+11}	25		X
J	5,7	16	29	45	45-{29+16}	0	X	
K	5,8	15	29	82	82-{29+15}	38		X
L	6,8	17	40	82	82-{40+17}	25		X
M	7,8	37	45	82	82-{45+37}	0	X	7

Ruta critica de actividades (RCA) = C – H –J - M

Una actividad crítica es una actividad que no puede ser retardada sin afectar la duración total del proyecto. En otras palabras, en el tiempo más temprano y el tiempo más tarde de inicio de la actividad son idénticos

Cronograma de Actividades (Diagrama de Gantt).-

ACTIVIDADES		
Código	(i,j)	tij
C	1,4	20
H	4,5	9
J	5,7	16
M	7,8	37
A	1,2	14
B	1,3	8
D	1,7	17
A’	2,4	0
E	2,6	6
F	3,5	14
G	3,7	21
I	5,6	11
K	5,8	15
L	6,8	17



ACTIVIDAD = INICIO + DURACION + HOLGURA

4.6 ACTIVIDADES PROPUESTAS

Resolver los siguientes Ejercicios. Resolver los siguientes problemas utilizando el método simplex (DURACION ESTIMADA 15 HORAS)

1.- Supongamos un proyecto que consta de 8 actividades con la siguiente tabla de precedencias (se incluyen también la duración de cada actividad)

Actividad	Precedencias	Duración
A	-	1
B	-	1
C	-	2
D	B	1
E	C, B	2
F	A,D	1
G	F	1
H	A	1

Construir la red Pert, Holgura de Actividades, Duración de la Red, Rutas Criticas y el diagrama de Gantt.

2.- Construir la red Pert, Holgura de Actividades, Duración de la Red, Rutas Criticas y el diagrama de Gantt.

Actividad	Precedencias	Duración
A	-	2
B	-	3
C	-	2
D	A	4
E	A, B, C	3
F	C	3
G	F	5
H	D, E, F	2
I	D, E, F, G	1

3.- Construir la red Pert, Holgura de Actividades, Duración de la Red, Rutas Criticas y el diagrama de Gantt.

ACTIVIDAD Código	ACTIVIDADES DESPUES	Duración (Días)
A	E, G, I, M	4
B	J, H	4
C	E,F,G, H, I, J, M	3
D	E, G, I, M	5
E	K	6
F	I, M	4
G	M	7
H	L, N	2
I	L, N	1
J	I, M	3
K	Ninguna	4
L	M	4
M	Ninguna	2
N	Ninguna	5

3.- Cosmetics, Incorporated, ha decidido producir un nuevo producto revolucionario para el mercado de consumidores. Los problemas de planeación y control de las diversas fases del programa promoción de ventas, adiestramiento de vendedores, fijación de precios, envase, publicidad y manufactura- son evidentes para la administración de la empresa, *Y* quieren que el lector la guíe en esa difícil situación, empleando PERT Tiempo, Determinando el tiempo del proyecto las Rutas Criticas, las holguras y cronograma de actividades

ACTIVIDAD	DESCRIPCION	ACTIVIDAD SECUENCIA	TIEMPO ESPERADO
A	Estudio de requerimiento de equipo	B	0.5
B	Escoger el proveedor del equipo	C, D, E, F, G	0.5
C	Determinarlos procedimientos de manufactura	H	2.0
D	Determinarlos procedimientos óptimos de compra y de inventario	I	2.0
E	Fijación de precios del producto(usando optimización)	K	1.0
F	Determinación del costo del nuevo producto	O	1.0
G	Equipo recibido e instalado en la fábrica	P	7.0
H	Determinar los procedimientos d control de la	Q	2.0

	calidad		
I	Hacer el pedido de materias primas	J	1.0
J	Manufactura y recibo de las materias primas para prueba y primeros recorridos de producción	Q	3.0
K	Bosquejar y finalizar el trabajo artístico	L	3.0
L	Enviar material de publicidad y envases a los proveedores	M	0.5
M	Tiempo para la producción de material de publicidad y su recibo	N	4.0
N	Recibo de envases y suministros de empaque	Q	0.5
O	Financiamiento de inventarios para el nuevo producto	Q	2.0
P	Personal disponible para la primera corrida de producción (algunos de los trabajadores del primer turno se cambiarán al segundo)	Q	0
Q	Elaboración de la corrida de prueba	R, S	2.0
R	Conferencia de ventas	T	0.5
S	Primera corrida de producción (suficientes artículos para los canales de distribución para la introducción del producto)	NINGUNA	6.0
T	Adiestramiento de ventas	NINGUNA	1.0

4.7.- PERT/COSTO

Generalidades.

Aparece en 1992 como complemento al PERT/TIEMPO, combina e integra en una Red dos factores importantes.

1. - Tiempo de duración de cada actividad
2. - Con el costo de cada actividad

PERT / Costo. Es una técnica de contabilidad de costo de proyectos, que permite la comparación de costos reales contra presupuestados, además, también permite comparar trabajo programado con trabajo terminado. PERT / Costo se puede definir como un sistema de administración de proyectos que mide y controla los costos mediante el uso de paquetes de trabajo.

Los problemas que se intentan resolver a través del PERT/COSTO son:

1. - Determinar el tiempo mínimo de duración de cada actividad, dando como resultado tiempos totales mínimos de duración de todo el proyecto.
2.- Determinar el costo mínimo de cada actividad para llegar a determinar los costos totales mínimos de todo el proyecto.

En el PERT/COSTO intervienen los siguientes costos:

Costos Directos.- Interviene directamente en le proyecto; mano de obra directa y materia prima.

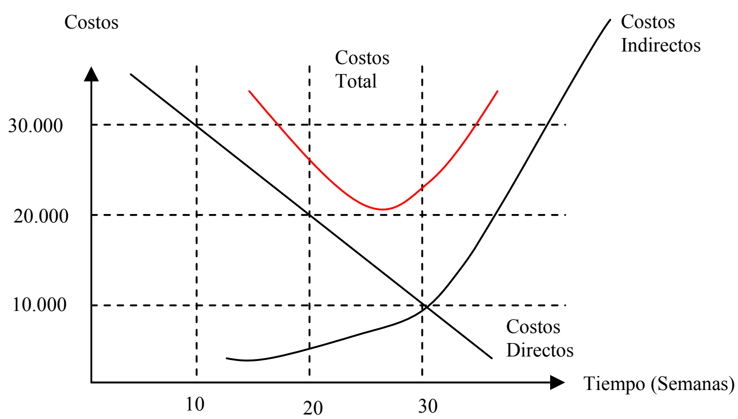
Costos indirectos.- Son aquellos que no se asignan directamente en el proyecto; mano de obra indirecta (Asesoráis), gastos generales de fabricación (energía eléctrica).

Por lo tanto los costos directos e indirectos tienen dos parámetros: El Tiempo y el Costo

Ejemplo: Proyecto de Implementación de un nuevo Sistema Financiero:

En el cual inicialmente esta planificado para 30 semanas, a un costo de $ 10.000. Luego el gerente pide que se realice en 20 semanas. Entonces la reducción de este tiempo implicara incrementar los costos (más personal, más equipos, más costos)

Aplicando el PERT/COSTO vamos a determinar que ese costo no se dispare, sino que sea el mínimo incremento, es decir no incrementar los costos por incrementar. Como se muestra en la siguiente grafica

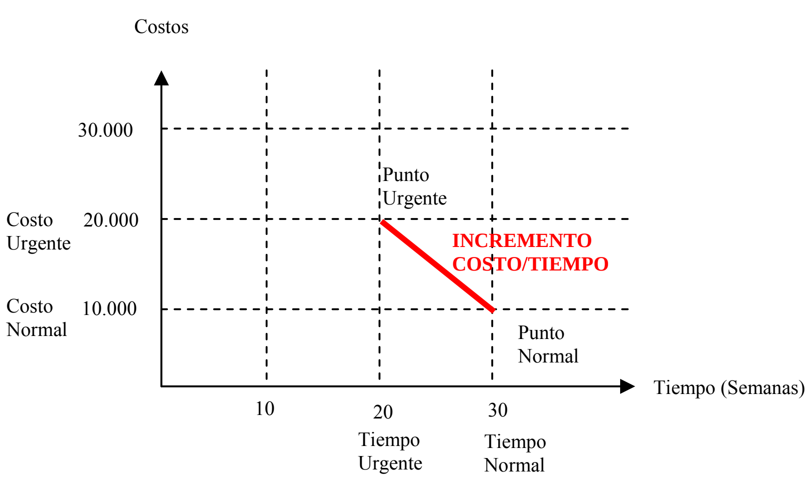


Conclusiones:

Costos directos: A mayor tiempo menor costo y a menor tiempo mayor costo

Costos indirectos: A mayor tiempo mayor costo y a menor tiempo menor costo

Incremento Costo/Tiempo.- Si integramos los dos tipos de costo tenemos la siguiente relación.



Punto Normal (PN).- Esta representado por el tiempo normal (TN), y el costo normal (CN).

Punto Urgente (PU). - Esta representado por el tiempo urgente (TU), y el costo urgente (CU)

$$Tg\ \beta = \frac{Sen\ \beta}{Cos\ \beta} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

La pendiente de costos directos

En base a la pendiente el Incremento costo/tiempo $$(ICT) = \frac{(CU - CN)}{(TN - TU)}$$

Si queremos disminuir el tiempo de un determinado proyecto tenemos que acelerar las actividades de la ruta critica, para esto tenemos que escoger las actividades que nos cuesta menos es decir lo que nos de el menor costo incremental

Procedimiento.

1.- Realizar etapas previas (listas de actividades y tiempos)

2.- Construir la Red original

3.- Calcular el costo incremental para cada actividad

4.- Determinar las rutas críticas (cuadro de holguras)

5.- Determinar las posibilidades para disminuir el tiempo del proyecto en una actividad

6.- Escoger la actividad o combinación de las actividades de menor costo incremental y disminuir el tiempo en las unidades que sea posible

7. - Repetir los pasos 2 al 6 asta que al menos una ruta critica haya llegado al limite.

Sugerencia.

1.- Reducir de derecha a izquierda (lo *más* próximo al final)

2. - Cuidar el incremento de tiempo por todas las rutas.

4.8 TAREAS PROPUESTAS

Elaboración y presentación de un proyecto Final, Utilizando las metodologías de PER/TIEMPO Y PERT COSTO (DURACION ESTIMADA 15 HORAS)

BIBLIOGRAFIA

LIBROS:

INVESTIGACIÓN OPERATIVA TAHA, HILLER-LIBERMAN

INVESTIGACIÓN OPERATIVA MATHUR KAMLESH-SLOW DANIEL

INVESTIGACIÓN OPERATIVA HERNAN MALDONADO

INVESTIGACIÓN OPERATIVA CAGIGAL

INVESTIGACIÓN OPERATIVA JUAN CARLOS ERAZO

INTERNET:

www.elprisma.com/apuntes/matematicas/analisisdesensibilidad/default.asp

www.investigacion-operaciones.com