UNIVERSIDAD TECNICA DE AMBATO
FACULTAD DE CONTABILIDAD Y AUDITORIA
INVESTIGACION OPERATIVA

INDICE

I INTRODUCCION

En el desarrollo del material de la asignatura, se hace considerando a la Investigación de Operaciones como una ciencia administrativa basada en el enfoque científico, para resolver problemas y proporcionar ayuda para la toma de decisiones. Planear, organizar, dirigir, dotar de personal, controlar, son actividades que los estudiantes tendrán que desarrollar en el ejercicio profesional una vez concluida la carrera, y la Investigación de Operaciones le sirve de ayuda con su método analítico y sistemático. Con base en este enfoque gerencial es que se plantea en el presente manual el estudio de esta ciencia.

TOMA DE DECISIONES CON INVESTIGACION OPERATIVA

Tomar decisiones es la tarea esencial de toda persona o grupo que tiene bajo su responsabilidad el funcionamiento de una organización entera o parte de ella.

La investigación operativa esta relacionada con la toma de decisiones, a través de la investigación de operaciones (métodos o modelos matemáticos) que permiten determinar Aplicaciones de Practicas Reales.

Estas prácticas reales pueden estar definidas en diferentes Ámbitos:

- Formulación de mezclas
- Planificación y evaluación de proyectos
- Distribución de productos
- Equipos de computación
- Asignación de recursos

En la toma de decisiones el análisis puede tomar dos formas: cualitativo y cuantitativo.
El análisis cualitativo se basa principalmente en el juicio y experiencia de la gerencia, incluye sentimientos intuitivos sobre el problema tratado y es más un arte que una ciencia. El análisis cuantitativo se concentra en hechos cuantitativos o datos asociados con los problemas y desarrolla expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes en ellos.

Seguidamente, utilizando métodos cuantitativos, obtiene resultados con los que se hacen recomendaciones basadas en los aspectos cuantitativos del problema. En otros casos, el análisis cuantitativo es sólo una ayuda para tomar la decisión y sus resultados deben ser combinados con información cualitativa.

DEFINICION DE INVESTIGACION OPERATIVA

¿Qué es la Investigación Operativa?

Quizás la definición de intencionalidad más generalista seria:

La Investigación Operativa, es la aplicación de procedimientos, técnicas y herramientas científicas, para lograr desarrollar y evaluar soluciones, eliminando la incertidumbre (no tener certeza) en la toma de decisiones.

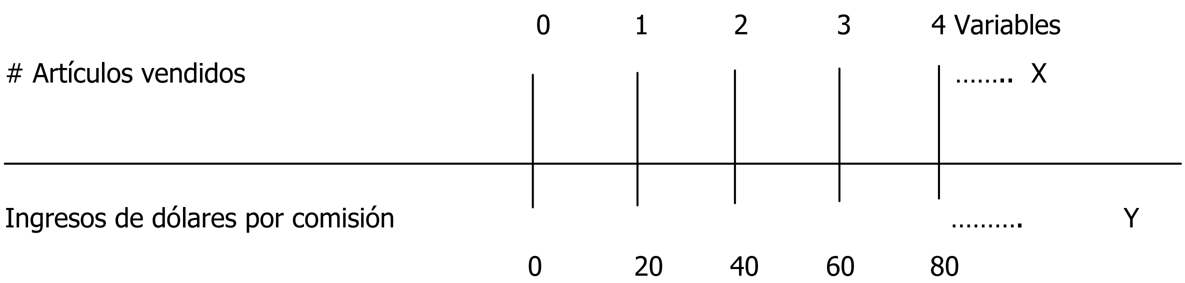
A la investigación operativa se le ha considerado como:
Ciencia.- Aplica las técnicas, algoritmos y métodos, para resolver modelos matemáticos.
Arte.- Por que interviene en diversas aplicaciones.

Modelos Matemáticos

Constituyen uno de los mas importantes en investigación operativa, son los modelos más abstractos porque utilizan símbolos matemáticos para representar una realidad. Ejemplo: Expresiones y operaciones matemáticas, relaciones matemáticas.

A pesar de que todos los modelos matemáticos son la base de la investigación operativa, no todos ellos son complejos como podemos ver en el siguiente ejemplo: Cual es el pago que recibiría un vendedor de un artículo determinado, si por cada artículo vendido recibe una comisión de 20 dólares.

Modelo descriptivo:



Modelo matemático:

X= # Artículos vendidos, Y= Ingresos de comisión
Variable de salida = Variable de entrada * Constante

$$Y = X * 20 \quad (1)$$

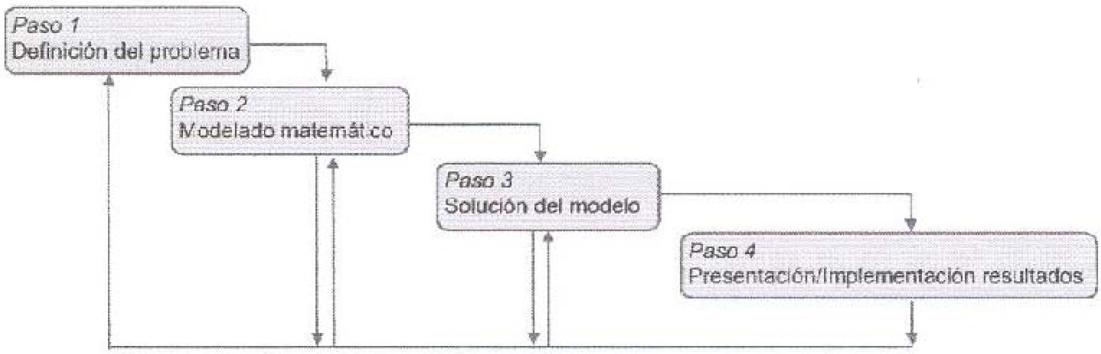
Si 20 = a

Entonces: $Y = a X$ (2)

$Y = f(X)$ (3), Este es el modelo matemático genérela o definitivo para que me permita tomar decisiones.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

En su forma más simple, la Investigación Operativa puede considerarse como un procedimiento que consta de cuatro pasos o etapas, tal como se muestra en la Figura



Sin embargo, los proyectos raramente se ajustan totalmente a este esquema en cascada, sino que normalmente los modelos han de ser revisados, las soluciones han de ser modificadas o los informes han de ser reescritos a medida que se modifican y ajustan el conjunto inicial de datos e hipótesis. Por tanto, algunas partes del proceso deben repetirse hasta que se encuentra una solución adecuada.

Paso 1. Definición del problema

Quizás la parte más importante de todo el proceso sea la definición del problema. Una respuesta incorrecta a una pregunta correcta no suele tener consecuencias fatales, ya que se pueden hacer revisiones y explorar otras alternativas: sin embargo, la respuesta correcta a una pregunta incorrecta puede ser desastrosa. Es importante que el problema esté claramente definido antes de invertir una gran cantidad de trabajo y energía en resolverlo.

Paso 2. Modelado matemático

El modelado matemático es un procedimiento que reconoce y verbaliza un problema para posteriormente cuantificarlo transformando las expresiones verbales en expresiones matemáticas. El modelado matemático es un *arte,* que mejora con la práctica. El proceso del modelado matemático consta de cuatro pasos:

2.1. Identificar las variables de decisión

Un paso crucial en la construcción de un modelo matemático es determinar aquellos factores *sobre los qué el decidor tiene control,* que normalmente se llaman variables de decisión del problema. Hay que distinguir entre 10 que está a nuestro alcance cambiar (por ejemplo, la cantidad de artículos a producir de cada producto o el material a utilizar) de aquello que no podemos modificar (como el número de horas de trabajo disponibles o fechas límite a cumplir), que normalmente denominaremos *parámetros.* Según el tipo de problema, 10 que a veces es una variable de decisión en otros casos puede ser un parámetro o viceversa.

Para identificar las variables de decisión, puede ser útil hacerse las siguientes preguntas: ¿qué es lo que hay que decidir? o ¿sobre qué elementos tenemos control? o ¿cuál sería una respuesta válida para este caso?

2.2. Identificar la función objetivo

El objetivo de la mayoría de los estudios de IO, y el de todos los modelos de optimización, es encontrar el modo de optimizar alguna medida respetando las restricciones existentes. Aunque una compañía quizás esté satisfecha con una mejora sustancial de la situación actual, normalmente el objetivo es buscar el valor óptimo para cierta función.

A la hora de encontrar la función objetivo, la pregunta que podemos hacemos es ¿qué es lo que queremos conseguir? o Si yo fuera el jefe de esta empresa, ¿qué me interesaría más?".

2.3. identificar las restricciones

En la búsqueda de la solución óptima, normalmente existen ciertas restricciones (limitaciones, requisitos) que limitan nuestra decisión. Ejemplos de restricciones frecuentes son: los recursos disponibles (trabajadores, máquinas, material, etc.) son limitados; fechas límite impuestas por los contratos; restricciones impuestas por la naturaleza del problema (por ejemplo: el flujo de entrada a un nodo debe ser igual al flujo de salida).

2.4. Traducir los elementos anteriores a un modelo matemático

Una vez identificados los elementos básicos hay que expresarlos matemáticamente. Dependiendo de la naturaleza de las funciones matemáticas, el modelo será de un tipo u otro; por ejemplo, si todas ellas son lineales, el problema será de Programación Lineal; si existe más de una función objetivo, será de programación multicriterio, etc.

Paso 3. Resolución del modelo

Aceptado ya el modelo matemático que mejor describe la situación en estudio, se aplican los algoritmos y métodos matemáticos diseñados para su resolución.

Paso 4. Presentación/Implementación de los resultados

Éste es el paso final dentro del proceso y consta de las siguientes tareas.

1. Preparar informes y/o presentaciones.

La comunicación efectiva de los resultados de un estudio es esencial para el éxito del mismo. La utilidad del análisis será nula si las personas que toman las decisiones no aprecian totalmente su valor. Los decisores deben comprender completamente el enfoque del analista, las hipótesis y simplificaciones que se han hecho, y la lógica en la recomendación. Las presentaciones orales (utilizando transparencias, videos o software especializado) y los informes son formas tradicionales para la comunicación.

2. Vigilar el proceso de implementación.

Una vez que se ha emitido el informe o se ha hecho la presentación, debe implementarse la solución propuesta, que a veces puede suponer cambios que sean conflictivos y encuentren resistencia en los miembros de la empresa. El apoyo del analista puede resultar crítico.

Una vez implementada la solución, debe ser supervisada de forma continua. Dada la naturaleza dinámica y cambiante de la mayoría de las empresas, es casi inevitable que haya que realizar cambios en el modelo. El analista debe estar preparado para saber cuándo ha llegado el momento de cambiar y para realizar dichos cambios.

II. PROGRAMACION LINEAL

GENERALIDADDES

Introducción.

En cualquier empresa, muchas de las decisiones que se toman tienen por objeto hacer el mejor uso posible (**optimización**) de los recursos de la misma. Por recursos de una empresa entendemos la maquinaria que ésta posea, sus trabajadores, capital financiero, instalaciones, y las materias primas de que disponga. Tales recursos pueden ser usados para fabricar productos (electrodomésticos, muebles, comida, ropa, etc.) o servicios (horarios de producción, planes de marketing y publicidad, decisiones financieras, etc.). La **Programación Lineal** (PL) es una técnica matemática diseñada para ayudar a los directivos en la planificación y toma de decisiones referentes a la asignación de los recursos. Como ejemplos de problemas donde la PL desarrolla un papel fundamental, podríamos citar:

1. A partir de los recursos disponibles, determinar las unidades a producir de cada bien de forma que se maximice el beneficio de la empresa.

2. Elegir materias primas en procesos de alimentación, para obtener mezclas con unas determinadas propiedades al mínimo coste.
3. Determinar el sistema de distribución que minimice el coste total de transporte, desde diversos almacenes a varios puntos de distribución.
4. Desarrollar un plan de producción que, satisfaciendo las demandas futuras de los productos de una empresa, minimice al mismo tiempo los costes totales de producción e inventario.

Dentro de la investigación operativa los casos o problemas mas sobresalientes se resuelven por medio de la programación lineal, siendo de gran ayuda en la toma de decisiones finales.

Como su nombre lo indica la programación lineal se refiere exclusivamente a relaciones lineales, es decir a inecuaciones o ecuaciones de primer grado aplicadas a resolución de problemas. La programación lineal se ocupa en problemas de insumos de producción, aplicaciones macroeconómicas de producción, asignación de recursos, maximización de recursos, minimización de costos, etc.

Concepto.

Es un proceso sistemático y matemático de enfocar un problema para lograr una solución óptima o la mejor posible de entre varias, empleando una función objetivo (propósito del problema), un conjunto de restricciones lineales y una condición de eliminar valores negativos. Los problemas de programación lineal planteados y resueltos con cualquiera de los métodos deberán cumplir con tres soluciones necesarias y suficientes.

a) Función Objetivo.- Es la ecuación que expresa la cantidad que va ha ser maximizada o minimizada, según el objetivo planteado y se la reconoce con la ecuación:

$$Z = C1X1+C2X2+C3X3+\ldots\ldots\ldots\ldots+ CnXn$$

Se acostumbra a realizar:
Z (MAX), para la maximización
Z (MIN), para la minimización

Xj, simboliza matemáticamente a las variables de decisión. Son los valores numéricos que se determinan con la solución del modelo y *representan* o están relacionadas con una actividad o acción a tomar. Son los únicos valores desconocidos en el modelo y pueden existir en cualquier cantidad, desde 1 hasta n variables. Es decir, j varía desde 1 hasta n. Son las variables del problema, las incógnitas a resolver o lo que queremos lograr.
En la ecuación Cj, matemáticamente, simboliza el coeficiente de la variable j en la Función Objetivo. Son datos relevantes, insumos incontrolables ya conocidos. En la Función Objetivo

representan la cantidad con la cual contribuye cada unidad de la variable j, al valor total deseado en el objetivo, pudiendo ser márgenes de beneficios, precios, costos unitarios, etc.

b) Limitaciones o Restricciones.- Es el conjunto de inecuaciones o ecuaciones que nos expresan las condiciones del problema, denominadas también coeficientes técnicos de producción.

El sistema de ecuaciones se presenta:

a11X1 + a12X2 + a13X3 + ... + a1nXn T1 b1
a21X1 + a22X2 + a23X3 + ... + a2nXn T2 b2
a31X1 + a32X2 + a33X3 + ... + a3nXn T3 b3
. . .
. . .
. . .
am1X1 + am2X2 + am3X3 + ... + amnXn Tm bm

En donde:

$$\left.\begin{array}{l} a11, a12, a13, \ldots\ldots\ldots\ldots, am \\ . \\ . \\ . \\ am1, am2, am3, \ldots\ldots\ldots\ldots, amn \end{array}\right\} \text{Coeficientes técnicos}$$

X1, X2, X3, ..., Xn: Son las variables o incógnitas del problema.

T1, T2, T3, ..., Tm: Son los límites de l sistema, se representan >=, <=, =

b1, b2, b3, ..., bm: son los valores máximos o mínimos.

c) Condición de no negatividad.- En ningún caso admitirá valores negativos que den respuesta al problema, pues no concibe tener una producción negativa, distancias negativas, gastos negativos; estos tendrán que ser por lo menos iguales a cero, es decir Xn >= 0, la cual se le considera siempre presente como una condición natural en el Modelo Lineal General.

FORMULACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE MODELOS LINEALES

La formulación y construcción de un modelo lineal no es otra cosa que definir un modelo matemático dentro de la metodología de IO, involucrando todos los pasos que debe tener un modelo matemático.

EJEMPLO 1.

Una empresa fabrica los productos A, B y C y puede vender todo lo que produzca a los siguientes precios: A, \$ 700, cada unidad; B, \$ 3.500; C, \$ 7.000. Producir cada unidad de A necesita 1 hora de trabajo, 2 horas de acabado y 3 unidades de materia prima. Producir una unidad de B necesita 2 horas de trabajo, 3 horas de acabado y 2.5 unidades de materia prima. Producir una unidad de C necesita 3 horas de trabajo, 1 hora de acabado y 4 unidades de materia prima. Para este período de planificación están disponibles 100 horas de trabajo, 200 horas de acabado y 600 unidades de materia prima. Determinar la cantidad optima de producción para maximizar las ganancias.

Recursos	Productos			
	A	B	C	Dispone
Horas de Trabajo	1h	2h	3h	100h
Horas Acabado	2h	3h	1h	200h
Materia Prima	3u	2.5u	4u	600u
Precios/Ganancia	\$700	\$3500	\$700	

a) Debe definirse claramente a las variables de decisión y expresarlas simbólicamente.

X1: unidades a producir de producto A
X2: unidades a producir de producto B Estos son insumos controlables
X3: unidades a producir de producto C
b) Debe Definirse claramente el objetivo y expresarse como función lineal.

Objetivo: Maximizar ingresos de venta

$$\text{Max } 700 \ \frac{\$}{\text{Unid de A}} \ X1 \text{ Unid de A} + 3.500\ X2 + 7.000\ X3$$

Escribir el objetivo de esta forma es expresar en unidades físicas uno de sus términos. Este término presenta la información específica de lo que contiene y permite confirmar la esencia física de lo que se está sumando y también que ello es consecuente con lo que se está obteniendo en el total de la ecuación; en este caso, ingreso en Dólares.

c) Deben definirse las restricciones y expresarlas como funciones lineales.

Restricción 1: Disponibilidad limitada de horas de trabajo.

$1 \frac{\text{hora}}{\text{Unid de A}}$ X1(Unid. de producto A) + 2 X2 + 3 X3 <=100 horas de trabajo

Restricción 2: Horas de acabado disponibles en este período:

2X1 + $3 \frac{\text{hora}}{\text{Unid de B}}$ X2 (unid. de producto B) + 1 X3 <=200 horas de acabado

Restricción 3: Disponibilidad limitada de unidades de materia prima:

3X1 + 2.5 X2 + $4 \frac{\text{unid.}}{\text{Unid de B}}$ X3 (unid. de producto B)<=600 Unidades de Materia prima

De esta forma las restricciones están expresadas en unidades físicas. Se destaca en cada una de ellas alguno de sus términos, con indicación de lo que representa. Esto confirma que lo que se está sumando es consecuente con lo que se está obteniendo del lado derecho de la ecuación.

Finalmente, incorporando la restricción de no-negatividad de las variables de decisión, se resume así el modelo:

Max 700 X1 + 3.500 X2 + 7.000 X3
Sujeto a:
1X1 + 2 X2 + 3 X3 <=100
2X1 + 3 X2 + 1 X3 <=200
3X1 + 2.5 X2 + 4 X3<=600
X1, X2, X3 >=0

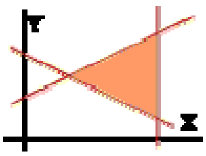
MÉTODOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

Una vez que se ha construido el modelo lineal este se pude resolver por distintos métodos de resolución.

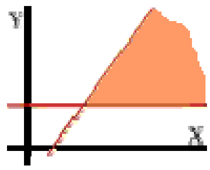
PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE EL MÉTODO GRÁFICO

Determinación de la Región Factible

La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de **región factible**, y puede estar o no acotada.



Región factible acotada



Región factible no acotada

La región factible incluye o no los lados y los vértices, según que las desigualdades sean en sentido amplio ($\leq$ o $\geq$) o en sentido estricto (< o >).

Si la región factible está acotada, su representación gráfica es un polígono convexo con un número de lados menor o igual que el número de restricciones.

El procedimiento para determinar la región factible es el siguiente:

1) Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.

Se dibuja la recta asociada a la inecuación. Esta recta divide al plano en dos regiones o semiplanos

Para averiguar cuál es la región válida, el procedimiento práctico consiste en elegir un punto, por ejemplo, el (0,0) si la recta no pasa por el origen, y comprobar si las coordenadas satisfacen o no la inecuación. Si lo hacen, la región en la que está ese punto es aquella cuyos puntos verifican la inecuación; en caso contrario, la región válida es la otra.

2) La región factible está formada por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones. Como sucede con los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución, en el caso de que exista el conjunto solución puede ser acotado o no.

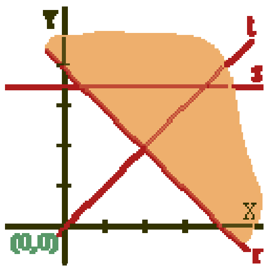
Veámoslo con un ejemplo: Dibuja la región factible asociada a las restricciones:

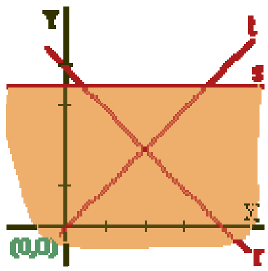
$x + y \geq 4$

$y \leq 4$

$y \geq x$

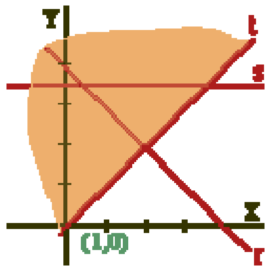
Las rectas asociadas son: r : $x + y = 4$; s : $y = 4$, t: $y = x$

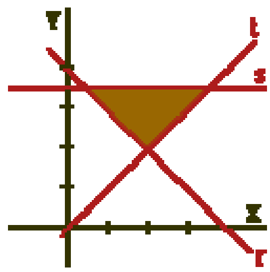




Elegimos el punto O(0,0), que se encuentra en el semiplano situado por debajo de la recta. Introduciendo las coordenadas (0,0) en la inecuación $x + y \geq 4$, vemos que no la satisface: $0 + 0 = 0 < 4$. Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano situado por encima de la recta r : $x + y = 4$.

Procedemos como en el paso anterior. Las coordenadas (0,0) satisfacen la inecuación $y \leq 4$ ($0 \leq 4$) . Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano que incluye al punto O.





La recta t asociada a la restricción pasa por el origen, lo cual significa que si probásemos con el punto O(0,0) no llegaríamos a ninguna conclusión. Elegimos el punto (1,0) y vemos que no satisface la inecuación $y \geq x$ ($y = 0 < 1 = x$). Por tanto, el conjunto solución de esta inecuación es el semiplano determinado por la recta t que no incluye al punto (1,0).

La región factible está formada por los puntos que cumplen las tres restricciones, es decir, se encuentran en los tres semiplanos anteriores

Ejercicios:

1.- Una Fabrica produce dos Tipos de Productos el Producto A y el Producto B; El primero requiere de la utilización de 7 Kilogramos de Materia Prima, de 2 hora/hombre de Mano de Obra, y de 4.5 horas/maquina de Utilización de Maquinaria. El segundo requiere de 3 Kilogramos de Materia Prima,3 horas/hombre de Mano de Obra y 4 horas/maquina de Utilización de Maquinaria.

La Empresa cuenta para la fabricación de productos con los siguientes recursos, 21 Kilogramos de Materia Prima, 12 horas/hombre de Mano de Obra y de 18 horas/maquina.

Cuál es la combinación optima de producción que maximice el Beneficio, suponiendo que la Fabrica estima ganar 15 dólares por cada unidad del Producto A, y 11 dólares por cada unidad del producto B.

Lo primero siempre es aconsejable establecer o plantear cuales son los datos del problema.

Datos del Problema.

REQUIEREN	PRODUCTOS		RECURSOS DISPONIBLES
	A	B	
Materia Prima	7Kg	3Kg	21Kg
Mano de Obra	2h/H	3h/H	12h/H
Utilización Maquinaria	4.5h/M	4h/M	18h/m
Beneficio	15 $	11 $	

Lo siguiente es realizar la Formulación del Modelo Lineal para lo cual seguimos los pasos ya mencionados anteriormente.

1. Variable de Decisión

X1= Cantidad a Producirse del Producto A

X2= Cantidad a Producirse del Producto B

2. Función Objetivo

$$Z(Max) = \frac{15\$}{Unid.A} X_1 Unid.A + \frac{11\$}{Unid.B} X_2 Unid.B$$

3. Restricciones

Referente a Materia Prima: $7X_1 + 3X_2 \leq 21kg$

Referente a mano de Obra: $2X_1 + 3X_2 \leq 12h/H$

Referente a Utilización de Maquinaria: $4{,}5X_1 + 4X_2 \leq 18h/M$

4. Condición de No Negativa.

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

Luego de realizar la formulación del modelo lineal es necesario generara la resolución del ejercicio, para lo cual se siguen los siguientes pasos.

5. Representar gráficamente el conjunto de restricciones lineales y marcar o establecer la región factible.

- Establecemos los puntos o valores de intersección de cada una de las restricciones con cada uno de los ejes del plano si la ecuación o inecuación lo permite, caso contrario se establecen valores para poder representar gráficamente cada restricción.

Abstracción de las desigualdades.

1) $7X_1 + 3X_2 = 21$

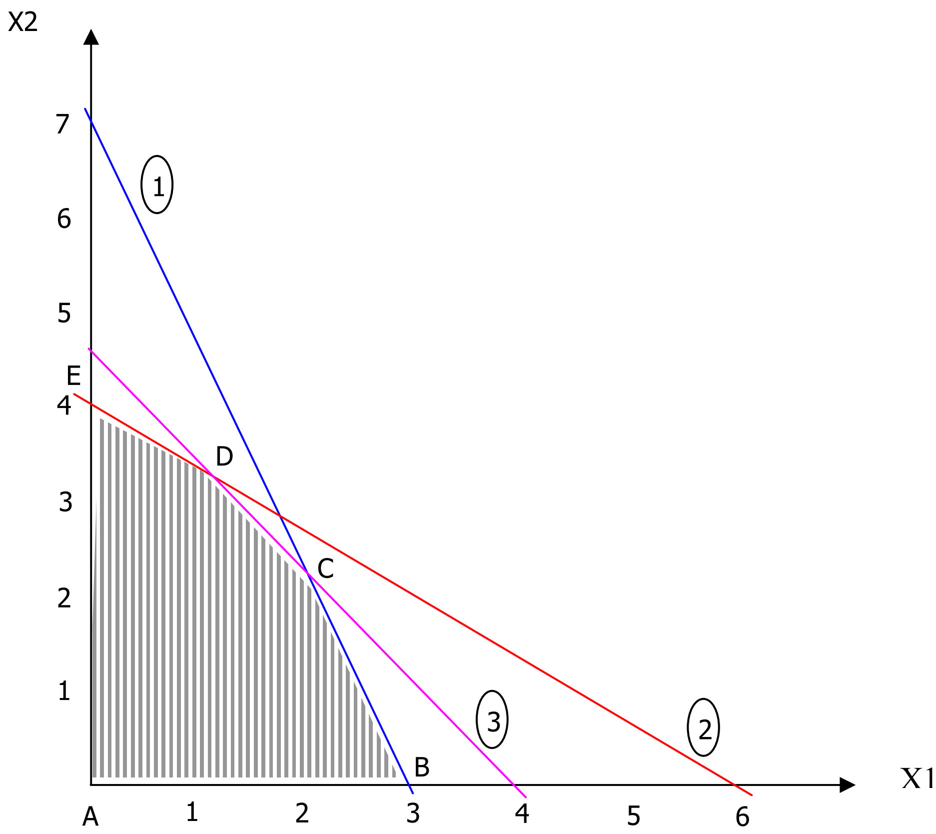
X1	X2
0	7
3	0

2) $2X_1 + 3X_2 = 12$

X1	X2
0	4
6	0

3) $4{,}5X_1 + 4X_2 = 18$

X1	X2
0	4,5
4	0



6. Hallar las coordenadas de los vértices del polígono obtenido.

Punto C

Entre la recta 1 y 2

$$7X_1 + 3X_2 = 21(-4)$$
$$4.5X_1 + 4X_2 = 18(3)$$
$$-28X_1 - 12X_2 = -84$$
$$13.5X_1 + 12X_2 = 54$$
$$-14.5X_1 / = -30$$
$$X_1 = 2.06$$
$$7(2.06) + 3X_2 = 21$$
$$X_2 = \frac{21 - 7(2.06)}{3}$$
$$X_2 = 2.17$$

Punto D

Entre la recta 2 y 3

$$2X_1 + 3X_2 = 12(-4)$$
$$4.5X_1 + 4X_2 = 18(3)$$
$$-8X_1 - 12X_2 = -48$$
$$13.5X_1 + 12X_2 = 54$$
$$5.5X_1 / = 6$$
$$X_1 = 1.09$$
$$2(1.09) + 3X_2 = 12$$
$$X_2 = \frac{12 - 2(1.09)}{3}$$
$$X_2 = 3.37$$

Los vértices son los siguientes

A (0,0)

B (3,0)

C (2.06, 2.17)

D (1.09, 3.37)

E (0,4)

7. Sustituir las coordenadas de estos puntos en la Función Objetivo y Hallar el valor Máximo (maximización) o Mínimo (Minimización), des esta forma encontrar la solución optima.

$Z = 15X_1 + 11X_2$

A en Z

Z=0

B en Z

$Z = 15(3) + 11(0)$

$z = 45$

C en z

$Z = 15(\cancel{2{,}06}) + 11(\cancel{2{,}17})$

$z = 52$

D en Z

$Z = 15(\cancel{1{,}09}) + 11(\cancel{3{,}37})$

$z = 48$

E en Z

$Z = 15(0) + 11(4)$

$z = 44$

$\boxed{\text{Z = 52 Solución Optima, Factible}}$

8. Interpretación de la Solución (Lógica).

La Empresa debe fabricar 2 unidades del Producto A, y 2 Unidades del producto B, para obtener un máximo Beneficio de 52 Dólares

9. Comprobación

Los puntos de la solución tienen que satisfacer todas las restricciones y la función objetivo:

$7X_1 + 3X_2 \leq 21$	$2X_1 + 3X_2 \leq 12$	$4{,}5X_1 + 4X_2 \leq 18$
$7(2) + 3(2) \leq 21$	$2(2) + 3(2) \leq 12$	$4{,}5(2) + 4(2) \leq 18$
$20 \leq 21$	$10 \leq 12$	$17 \leq 18$

Tipos de Soluciones.

Los programas lineales con dos variables suelen clasificarse atendiendo al tipo de solución que presentan. Éstos pueden ser:

FACTIBLES.- Si existe el conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones. A su vez, pueden ser:

1.- Con solución única; Ejemplo:

En una urbanización se van a construir casas de dos tipos: A y B. La empresa constructora dispone para ello de un máximo de 1800 millones de pesetas, siendo el coste de cada tipo de casa de 30 y 20 millones, respectivamente. El Ayuntamiento exige que el número total de casas no sea superior a 80.

Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de una casa de tipo A es 4 millones y de 3 millones por una de tipo B, ¿cuántas casas deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

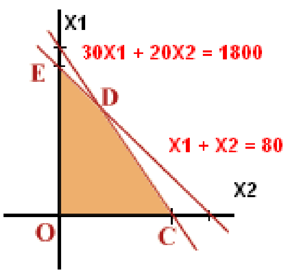
1) Variables de decisión: X1 = nº de casas tipo A ; X2 = nº de casas tipo B
2) Función objetivo: Maximizar Z = f(X1,X2) = 4X1 + 3X2
3) Conjunto de restricciones:

   El coste total $30X1 + 20X2 \leq 1800$.

   El Ayuntamiento impone $X1+ X2 \leq 80$.

4) De no negatividad: $X1 \geq 0$, $X2 \geq 0$.

5) Región Factible



6) Vértices

O (0,0); C (60,0); D (20,60); E (0,80)

7) Si hallamos los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices :

f(O) = f(0,0) = 0 ; f(C)=f(60,0) = 240 ; f(D) = f(20,60) = 260 ; f(E) = f(0,80) = 240

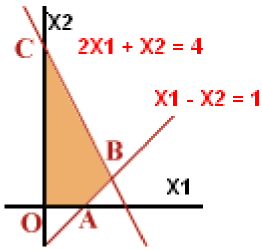
8) La solución es única, y corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice D(20,60). Por tanto se deben construir 20 casas de tipo A y 60 de tipo B con un coste de 260 millones de pesetas.

2.- Con solución múltiple; Si existe más de una solución, Ejemplo:

Maximizar la función Z = f(X1,X2) = 4X1 + 2X2

Sujeta a las restricciones: 2X1 + X2 $\leq$4 , X1 – X2$\leq$1 ,X1 $\geq$0 , X2 $\geq$0.

Región Factible



Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

f(O)=f(0,0) = 0 , f(A) = f(1,0) = 4 ; f(B)=f(5/3,2/3) = 8 , f(C) = f(0,4) = 8

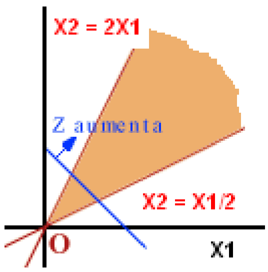
Todos los puntos del segmento La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices B y C, por tanto, en BC. Hay infinitas soluciones, solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible.

En estos casos, la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

3.- Con solución no Acotada; Cuando no existe limite para la función objetivo. Ejemplo:

Maximizar la función Z = f(X1,X2) = X + Y

Sujeta a las restricciones X2 $\leq$2X1 , X2 $\geq$X1/2 .



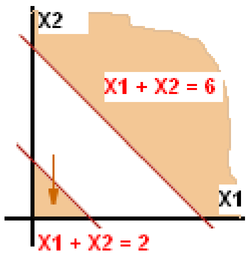
Tiene por región factible la zona coloreada que aparece en la figura, que es una región no acotada.

La función crece indefinidamente para valores crecientes de *X1* e X2.En este caso no existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución. Para que suceda esta situación la región factible debe estar no acotada.

NO FACTIBLES.- Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones, es decir, las restricciones son inconsistentes. Ejemplo:

Maximizar la función Z = f(X1,X2) = 3X1 + 8X2

Sujeta a las restricciones X1 + X2 ≥6 , X1 + X2 ≤2 , X1 ≥0 , X2 ≥0.



No existe la región factible, ya que las zonas coloreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones.
Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades no determina ninguna región factible.

Este tipo de problemas carece de solución

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD GRAFICO

El análisis de sensibilidad es una de las partes más importantes en la programación lineal, sobre todo para la toma de decisiones; pues permite determinar cuándo una solución sigue siendo óptima, dados algunos cambios ya sea en el entorno del problema, en la empresa o en los datos del problema mismo.

Este análisis consiste en determinar que tan sensible es la respuesta óptima del *Método*, al cambio de algunos datos como las ganancias o costos unitarios (coeficientes de la función objetivo) o la disponibilidad de los recursos (términos independientes de las restricciones).

La variación en estos datos del problema se analizará individualmente, es decir, se analiza la sensibilidad de la solución debido a la modificación de un dato a la vez, asumiendo que todos los demás permanecen sin alteración alguna. Esto es importante porque estamos hablando de que la sensibilidad es estática y no dinámica, pues solo contempla el cambio de un dato a la vez y no el de varios.

Objetivo Principal del Análisis de Sensibilidad

Establecer un intervalo de números reales en el cual el dato que se analiza puede estar contenido, de tal manera que la solución sigue siendo óptima siempre que el dato pertenezca a dicho intervalo.

Los análisis más importantes son;

1. Los coeficientes de la función objetivo; y

2. Los términos independientes de las restricciones y se pueden abordar por medio del *Método Gráfico* o del *Método Simplex*

Análisis de sensibilidad gráfico

Abordaremos primero el análisis de sensibilidad de manera gráfica.

Una empresa se fabrica dos solventes el s1 y el s2, para la elaboración de cada unidad s1 se requiere de 5 mg del componente C1, y de 8 mg del componente C2. Para cada unidad de s2 se requiere de 20 mg de C1 y 10 mg de C2. Sabiendo que la empresa se pude utilizar semanalmente hasta 40 mg de C1 y 100 mg de C2. Determinar cuántos mg de S1 y S2 deberán fabricarse para obtener el mayor beneficio posible, sabiendo que por el solvente s1 se estima ganar 3 dólares y por s2 2 dólares.

El problema planteado da como resultado el siguiente modelo de programación lineal:

$$Z(Max) = 3X_1 + 2X_2$$

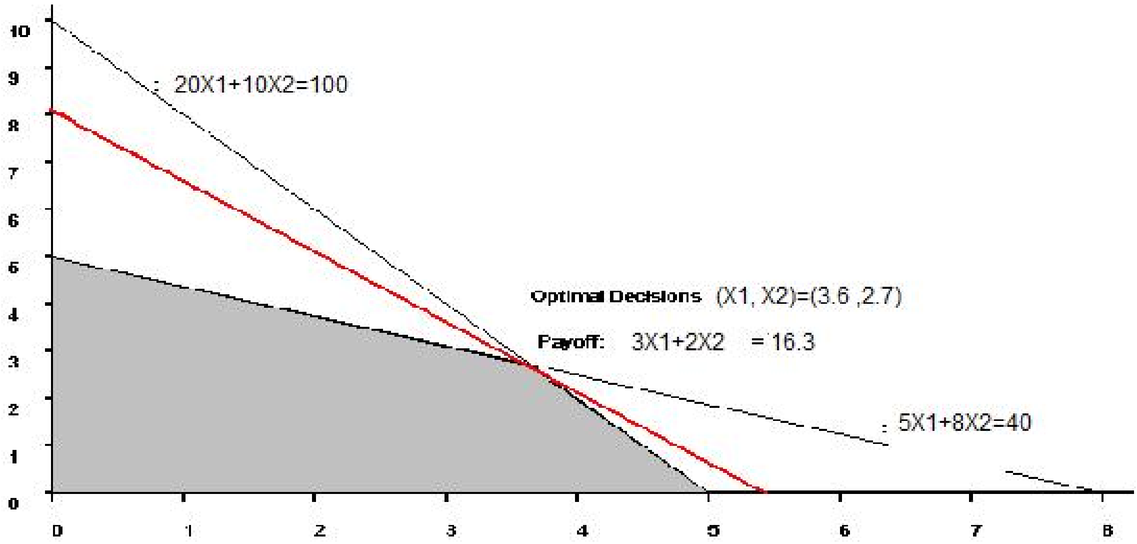
$$s/a:$$

$$5X_1 + 8X_2 \leq 40$$

$$20X_1 + 10X_2 \leq 100$$

$$x_1 \geq 0; X2 \geq 0$$

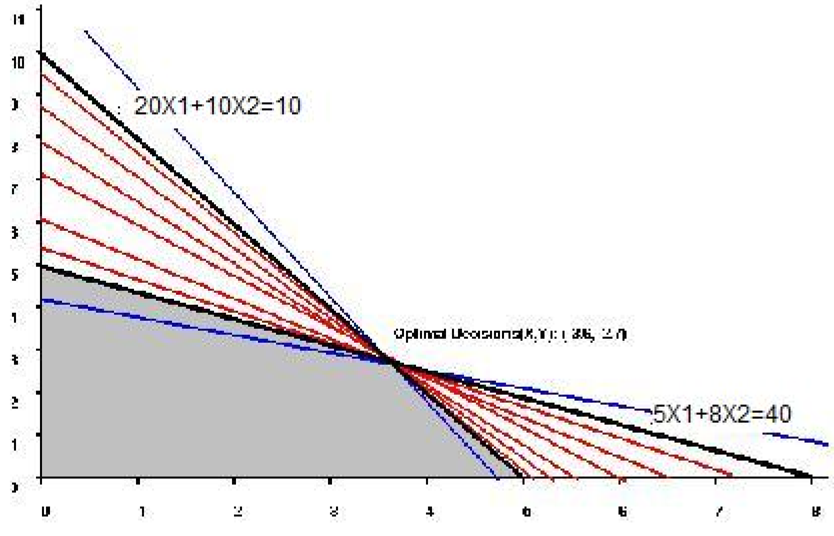
Cuya solución grafica es la siguiente:



Recordemos que nuestro objetivo es mantener la solución óptima que hemos encontrado X1=3.6 y X2=2.7, esto lo conseguiremos siempre y cuando la recta de **Isoutilidad** (recta roja) pase por el punto (3.6, 2.7) y no exista área de región factible por encima de ella.

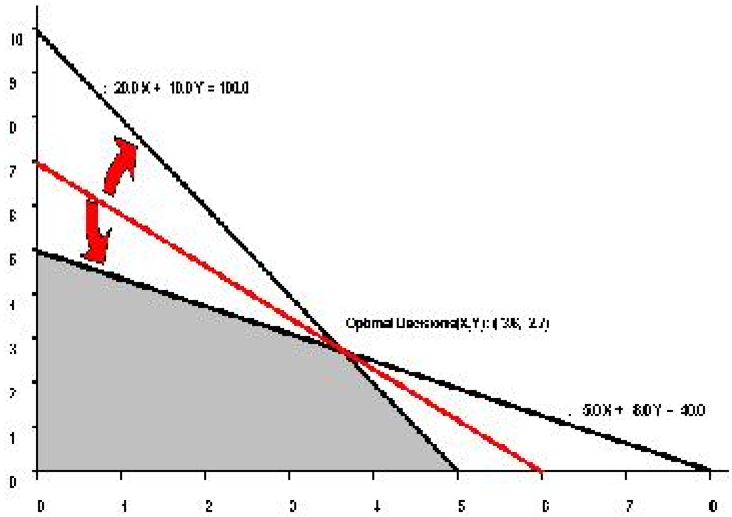
Análisis de sensibilidad gráfico para los coeficientes de la función objetivo

A partir del modelo anterior, podemos observar la siguiente figura:



Todas las líneas rojas mantienen la solución óptima pero las líneas azules generan una nueva solución óptima pues existe un área de la región factible sobre ellas, lo cual indica que la función no ha sido optimizada en el punto que analizamos (3.6, 2.7). Ahora si observamos bien la gráfica podemos notar que las líneas rojas, que son las que nos interesan, siempre están comprendidas entre las dos restricciones o desigualdades que definen el vértice óptimo (aquellas que simultaneamos para encontrar la solución) y las líneas azules están o bien por bajo o bien por encima de alguna de las dos restricciones.

Notemos que existen infinidad de rectas rojas que pasan por nuestro vértice óptimo y están comprendidas entre las restricciones. El procedimiento que seguimos para encontrar estas rectas fue girar la recta solución del problema original con centro en el punto pivote



Entonces lo único que esta variando en la recta de isoutilidad es la inclinación de ésta, y como sabemos la inclinación de una recta viene dada por su pendiente, es decir su primera derivada.

Todas las rectas de isoutilidad que mantienen la solución óptima tendrán la siguiente ecuación:

(X2-2.7)=m(X1-3.6)

Donde estamos forzando que pasen por el vértice óptimo y permitiéndole que su pendiente sea variable, lo cual la hace rotar alrededor del vértice óptimo.

Ahora está claro que debemos restringir la pendiente de manera que no exceda la inclinación de las restricciones, es decir que no sea mayor ni menor a las pendientes de las restricciones que definen la solución.

Las líneas de las restricciones son las siguientes con sus respectivas primeras derivadas y por consiguiente sus pendientes.

$$5X_1 + 8X_2 = 40$$
$$8X_2 = 40 - 5X_1$$
$$X_2 = \frac{40 - 5X_1}{8}$$
$$X_2 = 5 - \frac{5}{8}X_1$$
$$X_2' = m = -\frac{5}{8}$$

$$20X_1 + 10X_2 = 100$$
$$10X_2 = 100 - 20X_1$$
$$X_2 = \frac{100 - 20X_1}{10}$$
$$X_2 = 10 - 2X_1$$
$$X_2' = m = -2$$

De estas pendientes la menor es -2 y la mayor es -5/8, por lo que concluimos que las pendientes de nuestras rectas de isoutilidad deben estar entre estos valores. Así:

$$-2 \le m \le -\frac{5}{8}$$

Ahora que ya restringimos la pendiente, sabemos que las líneas de isoutilidad son líneas que se generan dando valores arbitrarios a la función objetivo (Z). Así:

$$3X_1 + 2X_2 = K; donde : k \in \Re$$

Cuando k=16.3 llegamos al óptimo de nuestro problema original

Ahora bien, nuestro objetivo es determinar cuanto pueden valer los coeficientes de la función objetivo de manera que la solución óptima no se altere, para ello plantearemos coeficientes generales de la función, de manera que el nuevo coeficiente de la variable *X1* será *C1* y el nuevo coeficiente de la variable X2 será *C2*, generando la nueva función objetivo:

$$C_1X_1 + C_2X_2 = K; donde : k, C_1, C_2 \in \Re$$

Encontremos entonces la pendiente de nuestra función objetiva.

$$\begin{aligned} C_1X_1 + C_2X_2 &= K \\ C_2X_2 &= K - C_1X_1 \\ X_2 &= \frac{K - C_1X_1}{C_2} \\ X_2 &= \frac{K}{C_2} - \frac{C_1}{C_2}X_1 \\ X_2{}' &= m = -\frac{C_1}{C_2} \end{aligned}$$

Entonces podemos lo siguiente será:

- Igualando estas pendientes y despejando el coeficiente que no se conoce, con esto se obtiene los rangos de valores en los cuales puede cambiar este valor, si el giro es menor de 90° hacia arriba ó hacia abajo.
- Si el giro es mayor de 90° el valor que toma el coeficiente es infinito

En nuestro caso particular de este problema se tiene que la función objetivo sus coeficientes son los siguientes para X1, su valor es 3 y para X2 su valor es 2.

Queremos saber cuanto podrá cambiar el coeficiente del Solvente S1 que ahora es 3 de tal manera que el punto donde se alcanzó el óptimo no cambie.

Ahora podemos resolver las igualdades para el coeficiente que nosotros queremos analizar. Algo **importante** a tomar en cuenta es que el análisis se hace un coeficiente a la vez, asumiendo que el otro permanecerá constante

Análisis de sensibilidad para:

Igualamos la pendiente de la primera restricción con la de función objetivo y hallamos el valor de C1 y da:

$$C_1:$$
$$C_2 = 2$$
$$-\frac{C_1}{2} = -2$$
$$C_1 = 4$$

Es decir, cambia de 3 a 4 se incrementa en 1 unidades por lo tanto $C_1 \leq 4$

Como la función objetivo no tiene que girar más de 90° para ponerse paralela a la segunda restricción, el valor de c_1 *no* es –infinito, por lo contrario si podemos igualar a la otra pendiente es decir:

$$-\frac{C_1}{2} = -\frac{5}{8}$$
$$C_1 = \frac{5}{4}$$

Es decir, cambia de 3 a 1,25 se redujo en 1,75 unidades por lo tanto $C_1 \geq 1{,}25$

De la misma manera procedemos con el coeficiente C2

$$C_2:$$
$$C_1 = 3$$
$$-\frac{3}{C_2} = -2$$
$$C_2 = \frac{3}{2}; dis\min uye$$
$$-\frac{3}{C_2} = -\frac{5}{8}$$
$$C_2 = \frac{24}{5}\ Aumenta$$
$$C_{x2} \geq \frac{3}{2}$$
$$C_{X2} \leq \frac{24}{5}$$

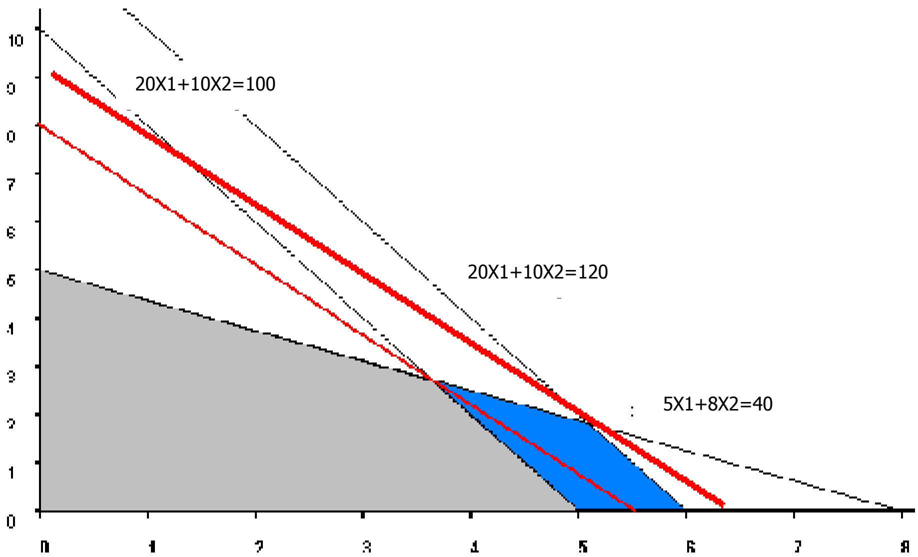
Conclusión: El coeficiente de la variable X1 puede estar comprendido entre 1.25 y 4, manteniendo constante el coeficiente de la variable X2, sin que la solución óptima varíe. **Conclusión:** El coeficiente de la variable X2 puede estar comprendido entre 1.5 y 4.8, manteniendo constante el coeficiente de la variable
X1, sin que la solución óptima varíe.

Análisis de sensibilidad gráfico para los términos independientes de las restricciones.

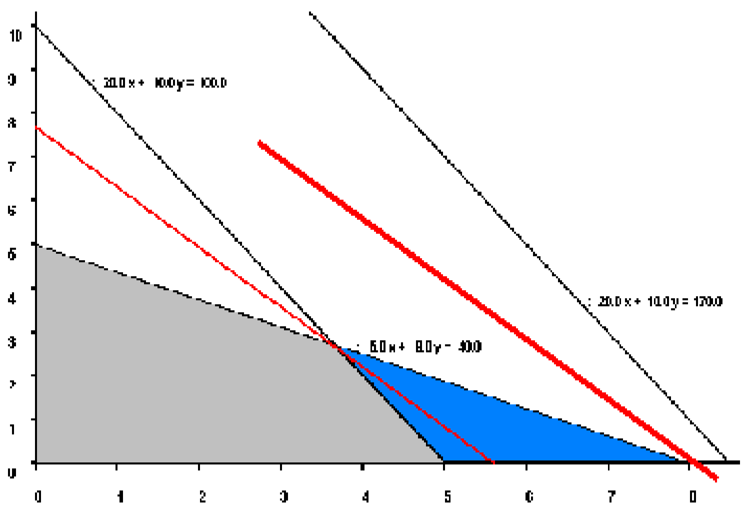
Ahora abordaremos el caso cuando uno de los términos independientes de las desigualdades varia, ya sea incrementándose o reduciéndose; asumiendo que los demás datos del problema siguen constantes.

La lógica a seguir en el análisis de sensibilidad de estos términos es un poco diferente, ya que cuando se poseen más recursos, es evidente que la solución óptima variara; pero nuestro objetivo será que el vértice de la solución óptima siga siendo la intersección de las mismas restricciones, es decir, que las restricciones que le daban solución al problema original, le den también solución al nuevo problema.

Observemos las siguientes figuras:



Podemos ver que con las nuevas 20 unidades de recurso en una de las restricciones (20X1+10X2<=120) la región factible se expande (zona azul) y evidentemente la solución óptima ha cambiado también; pero resulta que las mismas dos restricciones que definían la solución inicial, definen también la nueva solución. Se puede observar como la línea de isoutilidad se ha desplazado hacia el nuevo vértice óptimo, aumentando su valor.



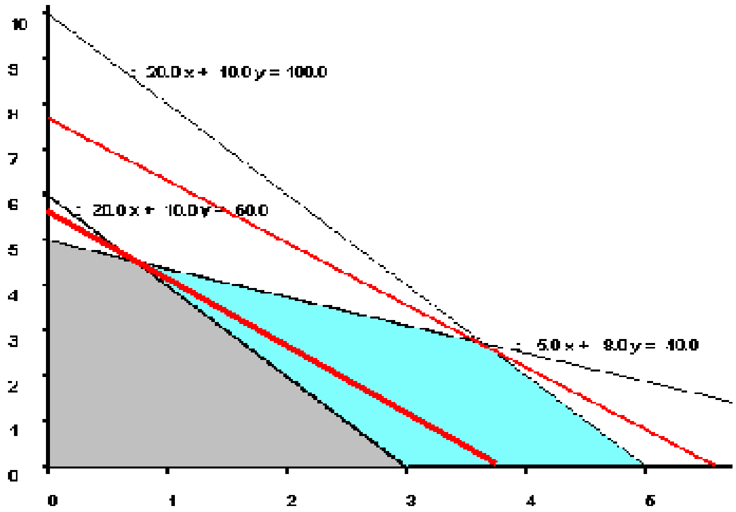
Si seguimos desplazando la recta de la restricción aumentando su término independiente, llegaremos a un punto en que esas restricciones ya no brindan la solución óptima, por ejemplo:

Ahora que la nueva restricción es:

20X1+10X2<=170 la región factible ya no depende de dicha restricción y por tanto esta restricción ha dejado de pertenecer a la solución óptima, lo cual queríamos evitar. Ahora bien ¿Qué determina hasta donde podemos desplazar la recta? Si nos fijamos bien mientras desplazábamos la restricción hacia la derecha hubo un instante en el que dejo de participar en la solución óptima, y es precisamente eso lo que buscamos evitar que alguna de las restricciones que dieron la respuesta inicial salga de la solución y por tanto ese punto donde la recta sale de la solución (8,0), es el que limita el valor de nuestro término independiente.

Nota: es en el punto (8,0) donde la restricción deja de formar parte de la solución.

Ahora la condición para que la restricción vuelva a ser parte de la respuesta óptima es que al menos pase por el punto que la limita, es decir, por (8,0), manteniendo constantes sus coeficientes por supuesto. Así, la nueva recta que pasa por este punto será: 20*8+10*0=160 entonces tenemos: 20X1+10 X2<=160 y de aquí podemos observar que el máximo valor que puede tomar el término independiente de esta restricción es 160.



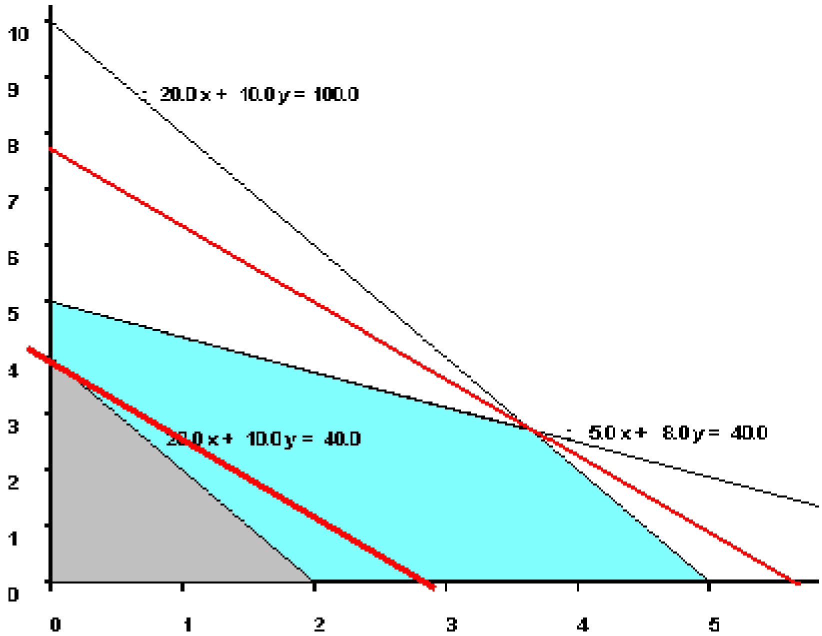
Ahora la pregunta es ¿Cuál es el mínimo?

Un análisis similar podemos ejecutar ahora con la misma restricción, pero en lugar de aumentar el término independiente lo disminuimos.

Observe:

Podemos ver que con las 40 unidades faltantes de recurso, en una de las restricciones (20X1+10X2<=60) la región factible se ha contraído (zona celeste) y evidentemente la solución óptima ha cambiado también; pero resulta que las mismas dos restricciones que definían la solución inicial, definen también la nueva solución. Se puede observar como la línea de isoutilidad se ha desplazado hacia el nuevo vértice óptimo, disminuyendo su valor.

Si seguimos desplazando la recta de la restricción disminuyendo su término independiente, llegaremos a un punto en que esas restricciones ya no brindan la solución óptima, por ejemplo



Ahora que la nueva restricción es: 20X1+10X2<=40 la región factible ya no depende de dicha restricción y por tanto esta restricción ha dejado de pertenecer a la solución óptima, lo cual queríamos evitar.

Ahora bien ¿Qué determina hasta donde podemos desplazar la recta? Si nos fijamos bien mientras desplazábamos la restricción hacia la izquierda hubo un instante en el que impidió que la otra restricción formara parte de la solución óptima, y es precisamente eso lo que buscamos evitar que alguna de las restricciones que dieron la respuesta inicial salga de la solución y por tanto ese punto donde la recta sale de la solución (0,5), es el que limita el valor de nuestro término independiente.

Nota: es en el punto (0,5) donde la otra restricción deja de formar parte de la solución

Ahora la condición para que la restricción vuelva a ser parte de la respuesta óptima es que al menos pase por el punto que la limita, es decir, por (0,5), manteniendo constantes sus coeficientes por supuesto. Así, la nueva recta que pasa por este punto será: 20*0+10*5=50 entonces tendremos: 20X1+10X2<=50 y de aquí podemos observar que el mínimo valor que puede tomar el término independiente de esta restricción es 50. Ahora ya hemos acotado el término, obteniendo el siguiente resultado:

Sea b2 el término independiente de la restricción número 2, tenemos:

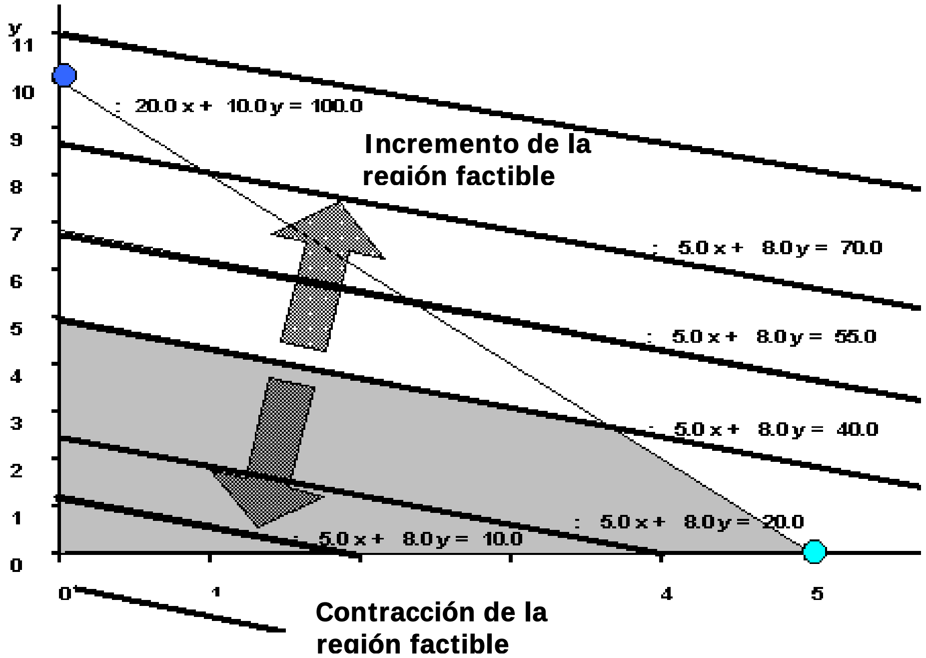
$$20X_1 + 10X_2 \leq b_2$$

Entonces la respuesta se mantiene óptima, sin alterar ningún otro dato del problema siempre que:

$$50 \leq b_2 \leq 160$$

El mismo análisis hay que efectuar para encontrar el intervalo del término independiente de la restricción 1

Al trazar líneas paralelas a la restricción que queremos analizar, podemos observar lo siguiente:



Se han marcado los puntos que limitan la participación de la restricción en la solución. El azul es el que lo limita superiormente y el celeste lo limita inferiormente.

Ahora entonces sustituimos esos puntos en la recta general:

$5X_1 + 8X_2 = b_1$

Que planteamos desde el inicio. Así

Límite superior: (0,10) 5*0+8*10=80 entonces el límite superior de b1 es 80

Límite inferior: (5,0) 5*5+0*8=25 entonces el límite inferior de b1 es 25

Entonces la respuesta se mantiene óptima, sin alterar ningún otro dato del problema siempre que:

$$25 \le b_1 \le 80$$

Precio Dual.- Es el cambio incremental en los beneficios por cambio unitario en el término independiente de una restricción, es decir.

La solución Óptima con b1<=40 es Z=16.3 con si variamos el valor de b1 al máximo valor que puede tomar b1<=80 el punto C seria: X1=0, X2=10 por tanto Z1=3(0)+2(10)=20, entonces:

Precio Dual=Z1-Z=20-16.3=3.7/40(unidades que se incrementaron a b1)

Precio Dual=0.09 $

Obtendríamos el mismo resultado si b1<=25.

Conclusiones:

El análisis de sensibilidad del modelo de programación lineal:

$$Z(Max) = 3X_1 + 2X_2$$
$$s/a:$$
$$5X_1 + 8X_2 \le 40$$
$$20X_1 + 10X_2 \le 100$$
$$x_1 \ge 0; X2 \ge 0$$

Arrojo los siguientes resultados:

Sea:

C i el coeficiente de la función objetivo de la variable i

Sea :

b i el término independiente de la restricción i

Entonces:

$$\frac{5}{4} \le C_1 \le 4 \qquad 25 \le b_1 \le 80$$
$$\frac{3}{2} \le C_2 \le \frac{24}{5} \qquad 50 \le b_2 \le 160$$

Siempre que exista una modificación en una y solo una de variables antes planteadas, **manteniendo todos los demás datos del problema constantes**, y dicha variable que cambió se mantiene dentro de los intervalos antes planteados, entonces la solución inicial sigue siendo óptima, es decir: **Z=16.3 para (X1, X2)=(3.6,2.7)**

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE EL MÉTODO SIMPLEX

Este método se fundamenta en encontrar una solución básica flexible a partir de la cual se va generando nuevas soluciones hasta encontrar la óptima (maximización o minimización).

Este método iterativo parte de un punto extremo conocido, permitiendo encontrar nuevos valores hasta satisfacer las condiciones de la función objetivo, las limitaciones y la no negatividad.

Procedimiento.- Cuando un sistema reúne un número inferior de incógnitas en relación a las ecuaciones existen muchas soluciones. Este es el caso más frecuente en problemas de programación lineal y en virtud de ello se considera introducir variables de HOLGURA en los casos que la expresión es <=, restar variables de HOLGURA e introducir variables ARTIFICIALES en los casos de >= y sumar variables ARTIFICIALES en el caso de =.

Es decir:

Se aplica en las restricciones para Maximizar y Minimizar

$\geq = -S(V.Ho\lg uras) + t(V.Artificiales)$

$\leq = +S$

$== +t$

En la Función Objetivo para se aplica:

Maximización:

S = + Ø S

t = - Mt

Fila Z= +t(restricciones) *(-Mt) →+Coeficiente Z

Minimización:

S = + Ø S

t = Mt

Fila Z= +t(restricciones) *(Mt) →+Coeficiente Z

Maximización._ Este caso se explicara mediante el siguiente ejercicio:

Una Fábrica de Electrodomésticos elabora dos tipos de Lavadoras: las modelos A y B, para fabricar una unidad del modelo A requiere de 2 trabajadores y 1 hora de utilización de maquinaria. Para fabricar una unidad del modelo B necesita 1 trabajador y 20 horas de utilización de maquinaria. También se sabe que la demanda entre ambos modelos es como mínimo 12 unidades.

Determinar el máximo beneficio que obtendrá la fábrica de acuerdo a una combinación optima de producción, si por cada modelo A se atiene un margen de utilidad de $70 y de $80 por cada unidad del B.

Datos del Problema.

REQUIEREN	PRODUCTOS		RECURSOS DISPONIBLES	Demanda de los 2 modelos
	A	B		
Mano de Obra	2 Trab.	1 Trab.	16 trabajadores	
Utilización Maquinaria	1 h	2 h	20 horas	12 unidades
Beneficio	70 $	80 $		

Lo siguiente es realizar la Formulación del Modelo Lineal para lo cual seguimos los pasos ya mencionados anteriormente.

1. Variable de Decisión

X1= # de unidades del modelo A
X2= # de unidades del modelo B

2. Función Objetivo

$$Z(Max) = \frac{70\$}{Unid.A} X_1 Unid.A + \frac{80\$}{Unid.B} X_2 Unid.B$$

3. Restricciones

Referente a Trabajadores: $2X_1 + X_2 \leq 16 trabajadores$

Referente a Utilización de Maquinaria: $X_1 + 2X_2 \leq 20 horas$

Referente a Demanda de los Productos: $X_1 + X_2 \geq 12 unidades$

4. Condición de No Negativa.

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

Pasos:

5.- Introducir variables de Holgura y variables Artificiales según indique el sentido de la desigualdad, como él un miembro de la inecuación es inferior al otro es necesario introducir una variable denominada de Holgura que cubra imaginariamente el valor faltante para convertirla en igualdad, restar variables de holgura y sumar una artificial de igual manera en aquellas desigualdades que el primer miembro es mayor que el otro:

La variable se introduce tanto en las limitaciones como en la función objetivo:
En la función objetivo para se aplica:
S = + Ø S
t = - Mt

$$\begin{aligned} 2X1 + X2 + S1 \qquad\qquad &= 16 \\ X1 + 2X2 + \quad + S2 \qquad &= 20 \\ X1 + X2 \qquad - S3 + t1 &= 12 \end{aligned}$$

Z(MAX) = 70X1 + 80X2 + 0S1 +0S2 + 0S3 - Mt1

Z - 70X1 - 80X2 + Mt1=0

El objetivo es ir eliminado las variables de holgura e irlas remplazando por alternativas en función de las variables básicas o fundamentales (propósito del problema), También se necesita igualar a cero la función objetivo para tener las ecuaciones de la forma aX+bY=c

6.- El proceso se desarrolla por cuadros (matrices) o etapas en la que cada una representa una mejor combinación que permita satisfacer la función objetivo y las restricciones, para lo cual necesitamos aplicar el método matricial de coeficientes.
Solución Inicial.

Vb	X1	X2	S1	S2	S3	t1	bm	
S1	2	1	1	0	0	0	16	
S2	1	2	0	1	0	0	20	
t1	1	1	0	0	-1	1	12	(*-M + Fila de Z) = Z1
Z	-70	-80	0	0	0	M	0	
Z1	-M -70	-M-80	0	0	M	0	-12M	

En donde:

Vb: Son las variables de de la base

bm: Es la cuantificación de los recursos disponibles

Z: Son los coeficientes de la función objetivo igualada a cero, para determinar el criterio del simplex que permite continuar o detener la generación de alternativas en la cual si todas las posiciones son menores a cero el proceso continua caso contrario se detiene.

Fila Z1= +t(restricciones) *(-Mt) →+Coeficiente Z

3.- Se debe determinar el elemento Clave o Pivote para lo cual:

- Seleccionamos la columna del Pivote, escogiendo el mayor negativo de la fila de Z1, en este caso tendríamos que dar un valora M y remplazar en las columnas que involucra el valor de M que generalmente sea mayor a los de bm (M>bm), de lo cual tendríamos la columna del Pivote sería la columna del valor –M-80.
- Luego seleccionamos el elemento Pivote, para lo cual dividimos los recursos que poseemos en la columna bm, para cada uno de los valores de la columna seleccionada.

  16 /1 = 16

  20/ 2 = 10 → menor valor de la división

  → Elemento PIVOTE

  12 /1 = 12

- Escogemos el menor valor de la división y el valor para el cual dividimos será el elemento PIVOTE
- De tal forma que podremos decir que, la variable S2 deja de ser una variable básica y la variable X2 entra a la base o se convierte en variable básica.

PIVOTE

Vb	X1	X2	S1	S2	S3	t1	bm	
S1	2	1	1	0	0	0	16	
S2	1	2	0	1	0	0	20	→ Fila Del Pivote
t1	1	1	0	0	-1	1	12	(*-M + Fila de Z) = Z1
Z	-70	-80	0	0	0	M	0	
Z1	-M -70	-M-80	0	0	M	0	-12M	

→ Columna Pivote

4.- Se procede a realizar la siguiente iteración:

- Obtener la nueva fila del Pivote para lo cual dividimos el elemento pivote para cada valor de la fila a la que pertenece dicho elemento.
  1/2; 2/2; 0/2; etc.
- Los otros valores de las otras filas se mantienen:

Segunda Iteración: (nueva Solución)

PIVOTE

Vb	X1	X2	S1	S2	S3	t1	bm	
S1	2	1	1	0	0	0	16	
S2	1/2	1	0	1/2	0	0	10	* (-1) + FS1; * (-1) + Ft1; *(M+80) FZ
t1	1	1	0	0	-1	1	12	
Z	-M -70	-M-80	0	0	M	0	-12M	

- Luego en base al nueva fila del Pivote, obtengo los nuevos valores de la iteración, haciendo que los otros valores que pertenecen a la columna del pivote sean igual a cero, es decir: 1=0 ; 1=0 y (–M-80) =0.Tambien remplazamos la variable que anteriormente quedo indicada.

Vb	X1	X2	S1	S2	S3	t1	bm	
S1	3/2	0	1	-1/2	0	0	6	
X2	1/2	1	0	1/2	0	0	10	
t1	1/2	0	0	-1/2	-1	1	2	*2
Z	-1/2M -30	0	0	1/2M+40	M	0	-2M+800	

Mientras la fila de Z tenga valores negativos la solución no es óptima y el proceso hay que volver a generar de lo cual tendremos

Tercera Iteración:

Sale de la Base t1 y Entra a la base X1.

Vb	X1	X2	S1	S2	S3	t1	bm	
S1	3/2	0	1	-1/2	0	0	6	
X2	1/2	1	0	1/2	0	0	10	
t1	1	0	0	-1	-2	2	4	* (4) + FS1;* (-1/2) + FX2;*(1/2M+30) + FZ
Z	-1/2M -30	0	0	1/2M+40	M	0	-2M+800	

Cuando una variable artificial es remplazada ya no es necesario de que forme parte de la matriz en la nueva solución

Vb	X1	X2	S1	S2	S3	bm	
S1	0	0	1	1	3	0	*1/3
X2	0	1	0	1	1	8	
X1	1	0	0	-1	-2	4	
Z	0	0	0	10	-60	920	

Cuarta Iteración:

Sale de la Base S1 y Entra a la base S3.

Vb	X1	X2	S1	S2	S3	bm	
S1	0	0	1/3	1/3	1	0	* (-1) + FX2; * (2) + FX1; *(60) + FZ
X2	0	1	0	1	1	8	
X1	1	0	0	-1	-2	4	
Z	0	0	0	10	-60	920	

Vb	X1	X2	S1	S2	S3	bm
S3	0	0	1/3	1/3	1	0
X2	0	1	-1/3	2/3	0	8
X1	1	0	2/3	-1/3	0	4
Z	0	0	20	30	0	920

Valor que toma la Función Objetivo (Solución Optima)

Solución:

Z = 920

X1 = 4 } Variables básicas; S1 = 0 } Variables no básicas.

X2 = 8 S2 = 0

S3 = 0 t1 = 0

Comprobación:

F.O:

Z= 70(4) + 80(8)

Z= 920

Restricciones:

2(4) + 1(8) + 0 = 16

16 = 16

1(4) + 2(8) + 0 = 20 1(4) + 1(8) + 0 = 12

20=20 12=12

LA DUALIDAD.

Asociados a u problema de programación lineal, existe otro problema que tiene una intima relación con el primero. Al problema original se le denomina ***Primal*** y al otro ***Dual.***

Un problema inicial (**Primal**) tiene la siguiente forma.

F.O:

Z (MAX) = C1X1 + C2X2 + C3X3

RESTRICCIONES:

a11X1 + a12X2 + a13X3 +………………….. + a1nXn <= b1

a21X1 + a22X2 + a23X3 + ………………….. + a2nXn <= b2

a31X1 + a32X2 + a33X3 + ………………….. + a3nXn <= b3

Zj>=0

El problema Dual correspondiente tendrá la siguiente forma.

F.O:

Z(MIN) = b1X1 + b2X2 + b3X3

RESTRICCIONES:

a11Y1 + a21Y2 + a31Y3 +………………….. + an1Yn >= C1

a12Y1 + a22Y2 + a32Y3 + ………………….. + an2Yn <= C2

a13Y1 + a23Y2 + a33Y3 + ………………….. + an3Yn <= C3

Yj>=0

Relaciones entre el Primal y el Dual.

Primal		**Dual**
Coeficientes de las variables de la F. Objetivo	→	Recursos
Recursos	→	Coeficientes de las variables de la F. Objetivo
Maximización	→	Minimización
<=	→	>=
Fila i	→	Columna j
Columna i	→	Fila j

Ventajas del Dula.-

La obtención del problema dual es importante cuando el número de restricciones es mucho mayor que el número de incógnitas o variables, ya que de esta manera se reduce la cantidad de operaciones que hay que realizar para resolver el modelo.

Ejemplo: un problema primal con 30 restricciones y 5 ecuaciones:

Primal	Dual
30 ecuaciones	5 ecuaciones
5 variables	30 variables
30 variables de Holgura	5 variables de Holgura y 5 Artificiales

Un caso concreto de Dualidad será:

Primal:

Z(MAX)= 80X1 + 60X2

sujeto a:

$$\begin{array}{rcl} X1 + X2 & \leq & 800 \\ X1 \qquad & \leq & 400 \\ X2 & \leq & 700 \\ 2\,X1 + X2 & \leq & 1000 \end{array}$$

Con: X1, X2 ≥ 0

Dual:

Z(MIN)= 800Y1 + 400Y2 + 700Y3 + 1000Y4

sujeto a:

$$\begin{array}{llllll} Y1 + & Y2 & & 2Y4 & \geq & 80 \\ Y1 + & & Y3 + & Y4 & \geq & 60 \end{array}$$

Con: Y1, Y2 , Y3, Y4 ≥ 0

En forma de matriz puede abreviarse así (incluyendo los ceros que no aparecen como coeficientes en las desigualdades anteriores)

$$\begin{array}{c} \\ Y1 \\ Y2 \\ Y3 \\ Y4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X1 & X2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leq \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ 800 \\ 400 \\ 700 \\ 1000 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{MIN} \\ \downarrow \end{array}$$

VI

MAX $\longrightarrow$ (80 60)

Propiedades del Dual.

Si el problema dual tiene una solución factible óptima, entonces el problema dual correspondiente tendrá una solución factible óptima con el mismo valor de la función objetivo.

Para una comprobación experimental resolvamos el problema anterior:

Los resultados por el simplex del dual serán:

Iteración final de la minimización: (Solución Optima)

Vh	Y1	Y2	Y3	Y4	S1	S2	bm
Y1	1	-1	2	0	1	-2	40
Y4	0	1	-1	1	-1	1	20
Z	0	-200	-100	0	-200	-600	52000

Iteración final de la maximización: (Solución Optima)

Vh	X1	X2	S1	S2	S3	S4	bm
S2	0	0	1	1	0	-1	200
X1	1	0	-1	0	0	1	200
S3	0	0	-2	0	1	1	100
X2	0	1	2	0	0	-1	600
Z	0	0	40	0	0	20	52000

Observe que el Z(max) es igual al Z(min).

El valor absoluto de los coeficientes de las variables de Holgura en la solución optima primal, son los valores óptimos de las variables duales, y viceversa.

Como se puede verse en las tablas óptimas,

$| Z3 | = 40 = Y1$ y $| Z6 | = 20 = Y4$

$| Z4 | = 0 = Y2$ y $| Z5 | = 0 = Y3$

III TRANSPORTE.

Son problemas especiales de Investigación Operativa que tienen su origen en la necesidad de transportar productos desde varias fuentes de suministro u orígenes a varios sectores de demanda o destino, entre los problemas más comunes están los de distribución y los de asignación.

En los Problemas de Distribución consisten en minimizar los costos que demanden en transportar los productos desde diferentes orígenes a los diferentes destinos en donde: F1, F2, F3,……., etc, son las fuentes de suministro, los orígenes o las ofertas. Y B1, B2, B3,……….., etc, son los destinos o sectores de demanda. Si hay suficientes recursos se satisfacen todas las demandas.

Los costos están dados por la distancia entre el origen y el destino. Estos vienen dados en forma de matriz como la siguiente:

j / i	**DESTINOS(Almacén)**				**CAPACIDAD DE SUMINISTRO (OFERTA)**	**……bj**
	B1	**B2**	**B3**	**B4**		
ORIGENES (Fabrica) F1	C11	C12	C13	C14	S1	
F2	C21	C22	C23	C24	S2	
F3	C31	C32	C33	C34	S3	
REQUERIMIENTOS (DEMANDA)	D1	D2	D3	D4		…..Dj
. . . **Fi**	. . . . .	. . . Cij Xij	. . .		. . . **Si**	

C11, representa el costo desde F1 hasta B1

X11, representa la cantidad que transportamos desde F1 a B1.

En forma de ecuaciones tendremos:

Función Objetivo.

Z(MIN)= C11X11 + C12X12 + C13X13 + C14X14 +
C21X21 + C22X22 + C23X23 + C24X24 +
C31X31 + C32X32 + C33X13 + C34X34 +

Z(MIN)= C11X11 + C12X12 + C13X13 + ………. + CmnXmn

Restricciones

1.- En cuanto a la capacidad de suministro.

$X11 + X12 + X13 + X14 = S1$

$X21 + X22 + X23 + X24 = S2$

$X31 + X32 + X13 + X34 = S3$

2.- En cuanto a los requerimientos de demanda.

$X11 + X21 + X31 = D1$

$X12 + X22 + X32 = D2$

$X13 + X23 + X33 = D3$

$X14 + X24 + X34 = D4$

Se pueden presentar tres casos en este tipo de problemas.

a) Si la capacidad de suministro es igual a los requerimientos se dice que se tiene un problema de transporte Homogéneo.
b) Si la capacidad de suministro es mayor a la demanda, se debe crear un destino ficticio que consuma el exceso del producto suministro.
c) Si la demanda es mayor que el suministro se debe crear un suministro ficticio que genere el suministro necesario para cubrir la demanda insatisfecha.

Método de Resolución de la Esquina Noroeste.

Para conocer este método partiremos de un ejercicio. Un problema clásico de este tipo es el siguiente: Dos fabricas F1 y F2, producen 40 y 50 unidades respectivamente de un determinado producto. Estas fábricas deben abastecer a tres centros de consumo, que necesitan 20, 45 y 25 unidades, respectivamente. Los costos de transportar de cada fábrica a cada centro de consumo están dados en la siguiente tabla.

FABRICAS	**CENTROS ED CONSUMO**		
	C1	**C2**	**C3**
F1	500	1000	1500
F2	1000	750	1400

¿Cómo han de distribuirse las unidades del producto para que el costo sea el mínimo posible?

Lo primero que se debería hacer es establecer los datos del ejercicio y especificar si se trata o no de un problema homogéneo.

FABRICAS	**CENTROS ED CONSUMO**			**Suministro**
	C1	**C2**	**C3**	
F1	500	1000	1500	40
F2	1000	750	1400	50
DEMANDA	20	45	25	90 / 90

El problema es homogéneo

Los pasos siguientes nos permiten la resolución del problema.

1. Determinar la Función Objetivo y las Restricciones del Problema.

$$Z(Min) = 500X_{11} + 1000X_{12} + 1500X_{13}$$
$$+ 1000X_{21} + 750X_{22} + 1500X_{23}$$

Suministro (Orígenes):

$$(F1): X_{11} + X_{12} + X_{13} = 40$$
$$(F2): X_{21} + X_{22} + X_{23} = 50$$

Demanda (Destinos)

$$(C1): X_{11} + X_{21} = 20$$
$$(C2): X_{12} + X_{22} = 45$$
$$(C3): X_{13} + X_{23} = 25$$

2. Encontrar una Solución Inicial.

Como Cualquier problema de Programación Lineal. Lo Primero es buscar una solución que satisfaga las restricciones del problema, es decir debemos asignar una cantidad del producto que envié cada fabrica a los centros de consumo aun cuando el costo total no sea el mínimo.

Esta solución debe incluir m+n-1 variables no nulas (básicas). Con el método de la Esquina Noroeste consiste en asignar el máximo posible de unidades en la primera casilla (C11), De esta forma se completa la columna o fila correspondiente, se prosigue con la fila o columna siguiente que no esté satisfecha en el casillero siguiente, y de esta forma se trata de completar cada una de las filas y columnas.

	C1	C2	C3	
F1	500 20	1000 20	1500	40
F2	1000	750 25	1400 25	50
	20	45	25	

En la solución inicial deben figurar, m+n-1 cantidades asignadas (casilleros llenos), siendo m el número de filas y n el número de columnas. Se debe diferenciar los costos de las unidades asignadas, por tal motivo los costos se remarcan en un recuadro.

Numero de casilleros llenos = m+n-1=2+3-1=4
Se calcula el costo con esta primera solución.
Z1=500*20+1000*20+750*25+1400*25=83750 $

3. Evaluar y Mejorar la Solución (Solución Óptima)

Para conocer si la solución obtenida es óptima se requiere hallar X_{ij} de cada ruta no utilizada denominadas también Variables no Básicas.

3.1. Encontrara los valores marginales de cada fila (vi) y de cada columna (wj), a través de resolver el sistema $C_{ij} = v_{ij} + w_{ij}$, tal que esta ecuación indica que la suma sea exactamente igual al costo que aparece en el cruce de la fila y columna a la que pertenece. Se asigna en cualquiera de los valores un valor concreto (usualmente vj=o), para obtener una solución particular del sistema y por sustitución progresiva obtener dos únicas variables en cada ecuación, como se muestra a continuación.

	C1	C2	C3		
F1	500 20	1000 20	1500	40	v1=250
F2	1000	750 25	1400 25	50	v2=0
	20	45	25		
	w1=250	w2=750	w3=1400		

Sistema de ecuaciones:

$$C_{23} = v_2 + w_3 \qquad C_{12} = v_1 + w_2$$
$$1400 = 0 + w_3 \qquad 1000 = v_1 + 750$$
$$w_3 = 1400 \qquad v_1 = 250$$

$$C_{22} = v_2 + w_2 \qquad C_{11} = v_1 + w_1$$
$$750 = 0 + w_2 \qquad 500 = 250 + w_1$$
$$w_2 = 750 \qquad w_1 = 250$$

3.2. Efectivamente a través de la diferencia entre el segundo y el primer miembro de cada sistema encontraremos los valores xij correspondientes a las variables básicas.

$$X_{ij} = C_{ij} - (v_{ij} + w_{ij}) --> X_{ij} = C_{ij} - v_{ij} - w_{ij}$$

Los valores de los casilleros vacíos (variables no básicas) serian los siguientes:

	C1	C2	C3		
F1	500 20	1000 20	1500 (-150)	40	v1=250
F2	1000 (750	750 25	1400 25	50	v2=0
	20	45	25		
	w1=250	w2=750	w3=1400		

$$X_{13} = C_{13} - v_1 - w_3 \qquad X_{21} = C_{21} - v_2 - w_1$$
$$X_{13} = 1500 - 250 - 1400 \qquad X_{21} = 1000 - 0 - 250$$
$$X_{13} = (-150) \qquad X_{21} = (750)$$

Si los valores de las variables no básicas son mayores o iguales a cero (Xij>=0) la solución es optima caso contrario hay que continuar con el proceso de mejorar la solución. Reasignar nuevamente las cantidades en las diferentes rutas tomando siempre la ruta de valor mínimo en nuestro caso (-150), por ende la ruta a elegir seria la (1,3) que es donde se empezara a sumar una constante θ. Sin embargo al asignar a la casilla (1,3) la cantidad de θ se altera la suma de la fila 1 y de la columna 3 por lo tanto se debe restar θ de un elemento de la misma columna y restarle θ a un elemento de la misma fila. El procedimiento de asignar θ debe continuar de tal forma que no altere todas las filas y columnas formando polígonos de secuencia como se muestra a continuación.

	C1	C2	C3
F1	20	20 (-θ)	(+θ)
F2		(+θ) 25	(-θ) 25

Luego se deducirá el valor de θ tomando el menor valor donde se aplico la resta de θ, en nuestro caso θ=20

3.3. La Nueva Iteración será el reemplazo de del valor de θ en las rutas que fueron asignadas

	C1	C2	C3	
F1	500 20	1000	1500 20	40
F2	1000	750 45	1400 5	50
	20	45	25	

Se calcula el nuevo valor de Z, y el proceso continua para determinar si la nueva solución es o no optima o hasta encontrar una solución optima.

Z2= 500*20+1500*20+750*45+1400*5=44750 $

	C1	C2	C3		
F1	500 20	1000 (150	1500 20	40	v1=100
F2	1000 (600	750 45	1400 5	50	v2=0
	20	45	25		
	w1=400	w2=750	w3=1400		

Como se puede observar la nueva solución es la óptima ya que todo sus valores de las variables no básicas son positivas.

La interpretación de la solución:

La fabrica 1 deberá transportar 20 unidades al centro de consumo C1 a un costo unitario de 500 $

La fabrica 1 deberá transportar 20 unidades al centro de consumo C3 a un costo unitario de 1500 $

La fabrica 2 deberá transportar 45 unidades al centro de consumo C2 a un costo unitario de 750 $

La fabrica 2 deberá transportar 5 unidades al centro de consumo C3 a un costo unitario de 1400 $

El costo total de transporte es de 44750 $.

Método de Resolución del costo Mínimo.

Para resolver un ejercicio por el método del costo mínimo en la solución inicial se selecciona la celda que tiene menor costo. En la celda seleccionada haga un envió al mínimo del suministro y la demanda para la fila y la columna que contiene la celda escogida. Luego hay que determinar si esta solución es optima caso contrario hay que generar nuevas soluciones y seguir el mismo procedimiento que el método de la esquina noroeste.

IV PROGRAMACIÓN PERT/TIEMPO – CPM/RUTA CRÍTICA

Generalidades PERT y CPM están basados sustancialmente en los mismos conceptos, aunque representan algunas diferencias fundamentales. Primero, según fueron desarrollados originalmente, los métodos PERT estuvieron basados en estimaciones probabilísticas de la duración de actividades, lo cual dio por resultado una ruta probabilística a través de una red de actividades y un tiempo probabilista de terminación del proyecto. Los métodos CPM, por su parte, suponen tiempo de actividades constantes o deterministas.

La conceptualización del sistema de actividades como una red vino a constituir un paso importante en el análisis de los sistemas de producción en gran escala. El concepto del flujo a través de la red se centra en factores importantes de la programación, como son la interacción entre la duración respectiva de las actividades, sus fechas de iniciación más próxima y más distante y la secuencia que se requiere en la producción.

TERMINOLOGÍA

Definición.- Es una técnica de planificación que utiliza un modelo matemático

PERT (Técnicas para la Revisión y Evaluación de Proyectos)
Permite optimizar el tiempo de un proyecto con la utilización adecuada de recursos.
Planificar, evaluar y realizar correctivos de un proyecto sobre la marcha en menor tiempo y costo.

CPM (Método de un Ruta Crítica)
Permite determinar la ruta que permita establecer la duración del proyecto.

Grafica de GANTT como antecedente del PERT*.-* Es una técnica que nos permitirá medir la duración total de un proyecto o de sus actividades individuales.

Esta técnica se aplica para:

- Medir las cargas de trabajo departamentales
- Medir el volumen de trabajo de maquinaria y equipos
- Aplicaciones de Proyectos

La gráfica de GANTT muestra la relación entre los eventos significativos de la misma actividad pero no las relaciones entre los eventos de las diferentes actividades.

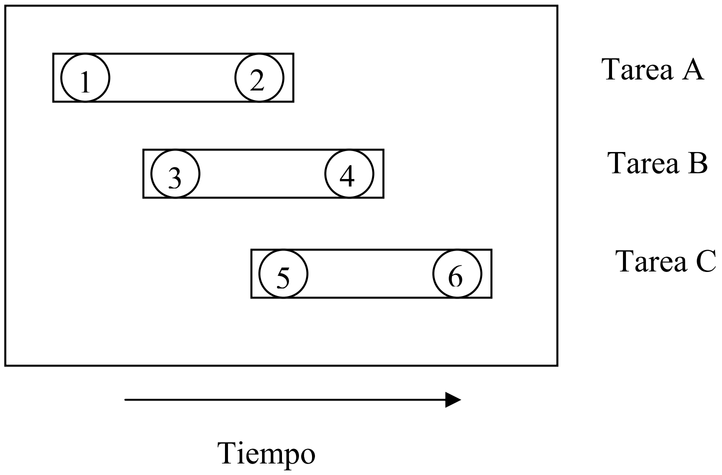


Fig1. GRAFICA DE GANNT DE EVENTOS SIGNIFICATIVOS

La escala de tiempo puede ser en semanas, días, meses, etc.

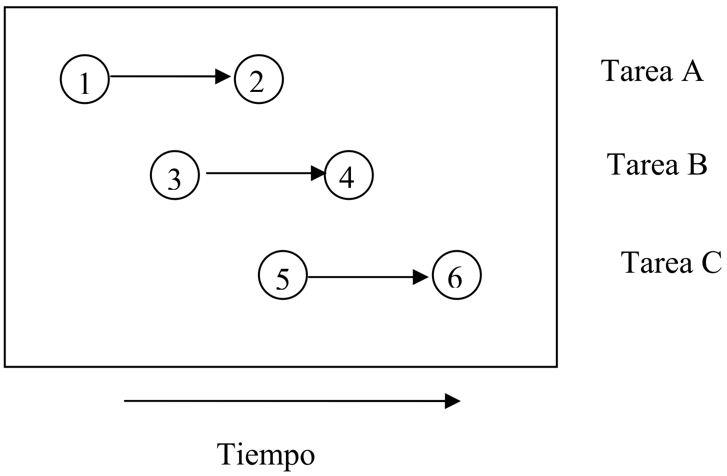


Fig2. GRAFICA DE GANNT, REMOCION DE LOS RECTANGULOS PARA REMPLAZAR POR FLECHAS

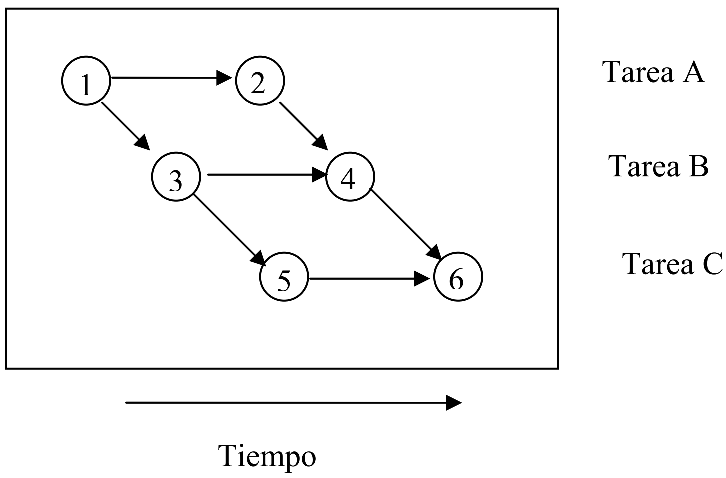


Fig3. GRAFICA DE GANNT, MUESTRA LA RELACIÓN DE EVENTOS DE UNA MISMA ACTIVIDAD Y ENTRE ACTIVIDADES

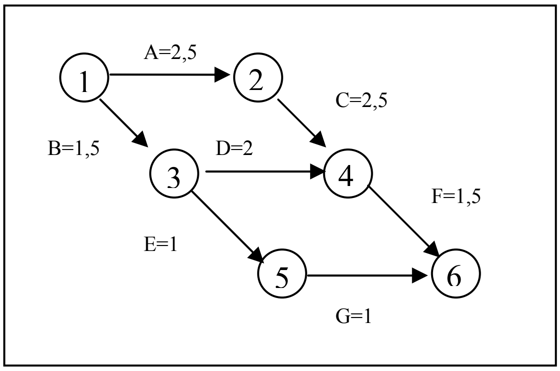


Fig4. TRANSFORMACION COMPLETA DE LA GRAFICA DE GANTT A LA RED PERT

Se elimina la denominación de tares y se incluye dentro de la flecha, se eliminan las escalas de tiempo y se incluyen los tiempos individuales de cada flecha.

RED PERT

Definición.- Es una técnica que nos permite planificar la consecución de un objeto de un proyecto en general.

No solo es planificación si no también se puede medir el avance de su proyecto u objeto.

Una vez evaluado se puede tomar decisiones y tomar correctivos, permite planificar y mejorar lo planificado

Aplicaciones.-

- Construcción
- Desarrollo de sistemas informáticos
- Controles y auditorias financieras
- Instalación de plantas industriales

Requisitos para la aplicación de Red PERT.- Los proyectos deben cumplir:

- Proyectos grandes que tengan gran cantidad de actividades
- Que sean proyectos dinámicos, que estén sujetos a cambios continuos
- Proyectos por lo general de gran inversión económica (costosos)
- En proyectos urgentes

Proyectos no aplicables (Donde no se puede usar PERT)

- En proyectos que tengan una trayectoria lineal u horizontal
- Proyectos que sean pequeños

Ventajas.-

- Conocer el tiempo de inicialización y finalización del proyecto
- Saber el tiempo y costo mínimo de un proyecto
- Permite una flexibilidad y un refinamiento en los proyectos.

Terminología.-

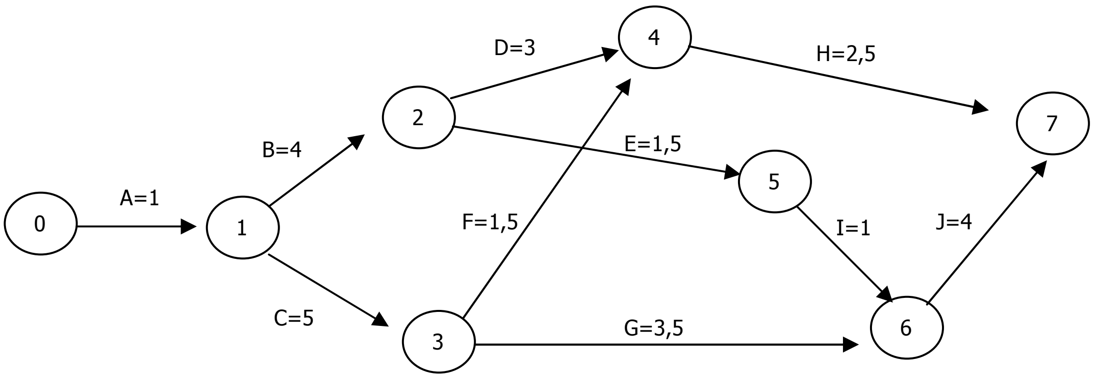


Fig5. RED PERT

a) Actividades.-

- Están representadas por una flecha
- No importa la magnitud de la flecha ni su dirección
- Lo importante es la secuencia o la relación de las actividades
- Toda actividad tiene duración y es una parte del proyecto

b) Eventos.-

- Están representados por círculos
- Los eventos no tienen duración, llamados también Hitos
- Permiten marcar puntos en el tiempo
- Existen eventos iniciales y finales
- Se les asigna un número

Enumeración de Eventos

Existen **normas** para enumerar los eventos:

- Es preferible enumerar de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo
- El evento de finalización debe ser mayor al de inicio

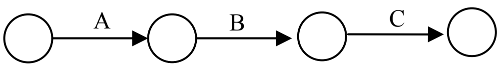
Existen reglas para enumerar eventos:

Para enumerar un evento deberá enumerarse antes los eventos que están en los extremos de las flechas o de las actividades que concurren o llegan a dicho evento.

c) Relaciones.-

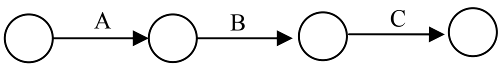
La grafica permite establecer claramente la secuencia de las relaciones y estas pueden ser:

PRECEDENCIA O ANTECEDENCIA



- A la actividad A no le antecede ninguna actividad
- A la actividad B le antecede la actividad A
- A la actividad C le antecede la actividad B
- ¿Qué actividades llegan al inicio de la actividad en referencia?

SECUENCIA

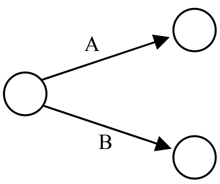


- A la actividad A le sigue la actividad B
- A la actividad B le sigue la actividad C
- A la actividad C le no le sigue ninguna actividad
- ¿Qué actividades salen del final de la actividad en referencia?

CONCURRENCIA

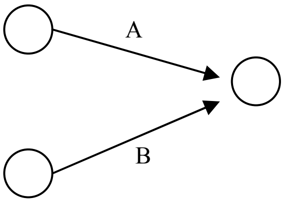
SALIDA

A y B salen del mismo evento



LLEGADA

A y B llegan al mismo evento



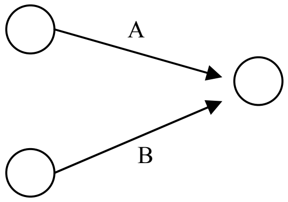
d) Actividades Ficticias

- No tienen duración o su tiempo de duración es igual a cero
- Es un artificio gráfico, sirve para representar relaciones complejas en una RED

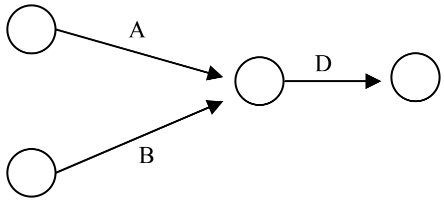
Ejemplo: Condiciones de las relaciones.

1. A Y B son concurrentes de llegada
2. a D le antecede Ay B
3. C y D tienen concurrencia de salida
4. a C le antecede solo A

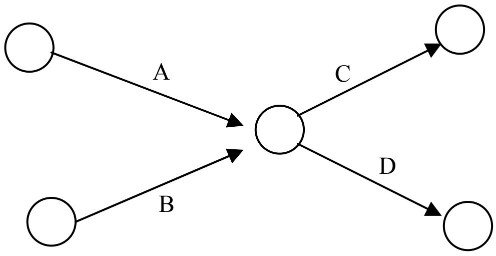
1.



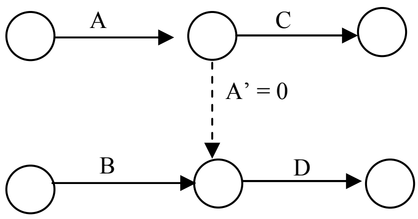
2.



3.



4.



PERT / TIEMPO

Es importante el cálculo de tiempos estimados para cada una de las actividades del proyecto para determinar la duración total del mismo y así tener la aceptación o la negación de su realización.

Tiempo Esperado (Te).- Es el tiempo de duración de cada actividad y estos tiempos son proporcionados por especialistas en cada una de las materias.

Se obtiene a través de estadística y la probabilidad (BETA)

Te = (a + 4m + b) / 6

Donde:

a = Tiempo más optimista, es el tiempo en que puede durar una actividad en las mejores condiciones posibles.

b = Tiempo más pesimista, que es el tiempo más largo que puede demorarse una actividad en las peores condiciones posibles.

m = Tiempo más probable o medio, es el tiempo en el que puede desarrollarse una actividad en condiciones normales.

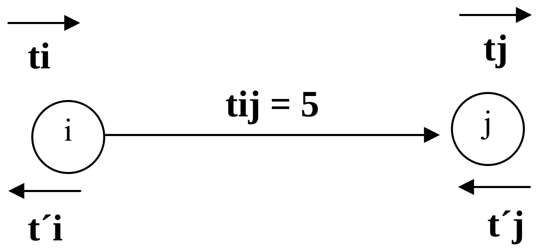
Ejemplo:

a = 4 h	Te = (4 + 4*8 +16)/6
m = 8 h	Te = 8,7 h
b = 16 h	

Tiempos Más Próximos y Más Tardíos de una actividad.-

Tiempo Más Próximo.- Es la fecha más temprana de inicio de la actividad y se calcula de izquierda a derecha o del inicio al final

Tiempo Más Tardío.- Es fecha más lejana del inicio de una actividad, se calcula del final al inicio.



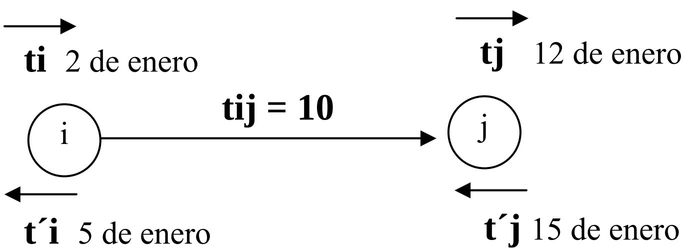
ti = tiempo más próximo de inicio

t´i = tiempo más tardío de inicio

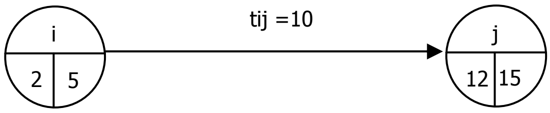
t j = tiempo más próximo de finalización

t´j = tiempo más tardío de finalización

Ejemplo:



En la RED:



Tiempo de Eventos.-

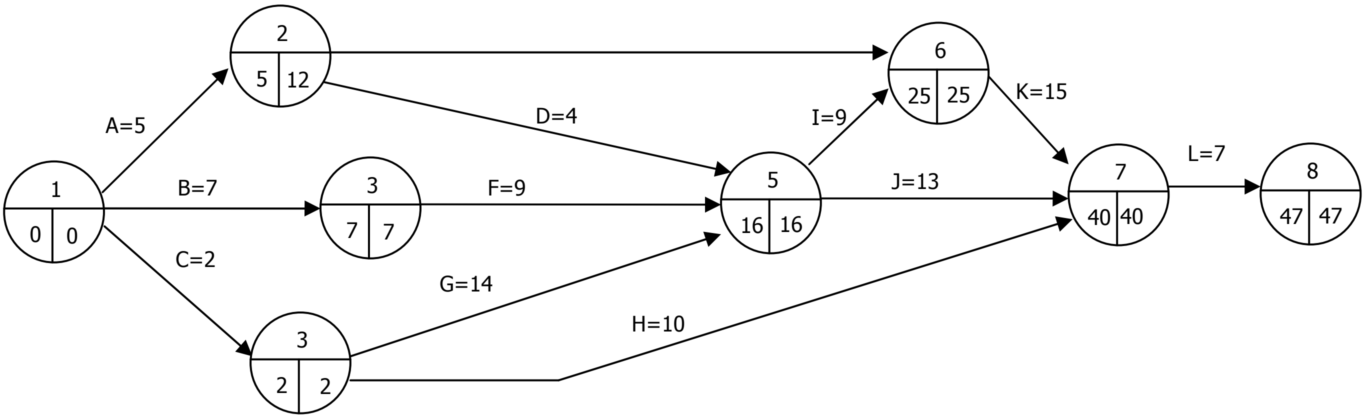


FIG 6. TIEMPOS DE EVENTOS

Tiempo más próximo a un Evento.- Es el que ocurrirá si las actividades que lo preceden comienzan lo más pronto posible.

ti= Máximo valor de los tiempos resultantes de la suma de ti+ tij

max(ti + tij)

Cálculo de tiempos más próximos

Evento	Evento inmediato anterior	Tiempo más próximo + Tiempo de la Actividad	Máximo=Tiempo mas próximo
1	---	----	0
2	1	0+5	5
3	1	0+7	7
4	1	0+2	2
5	2 3 4	5+4 7+9 2+14	16
6	2 5	5+8 16+9	25
7	4 5 6	2+10 16+13 25+15	40
8	7	40+7	47

Tiempo más tardío a un Evento.- Es el último momento en el que puede ocurrir sin retrasar la terminación del proyecto más allá de su tiempo más próximo.

t´j = Mínimo valor de los tiempos resultantes de la diferencia de t´j - tij

min(t´j - tij)

Cálculo de tiempos más tardío

Evento	Evento inmediato anterior	Tiempo más tardío - Tiempo de la Actividad	Mínimo=Tiempo mas tardío
8	---	----	47
7	8	47-7	40
6	7	40-15	25
5	7 6	40-13 25-9	 16
4	7 5	40-10 16-14	 2
3	5	16-9	7
2	6 5	25-8 16-4	 12
1	4 3 2	2-2 7-7 12-5	0

Ruta Crítica (De eventos).- La Ruta Crítica de una Red es la ruta de tiempo más largo a través de la misma, es decir donde el tiempo más próximo es igual al tiempo más tardío.

RC1 = 1-3-5-6-7-8

RC2 = 1-3-5-7-8

RC3 = 1-4-5-6-7-8

RC1 = 1-4-5-7-8

Holgura de Eventos Y Holgura de Actividades.-

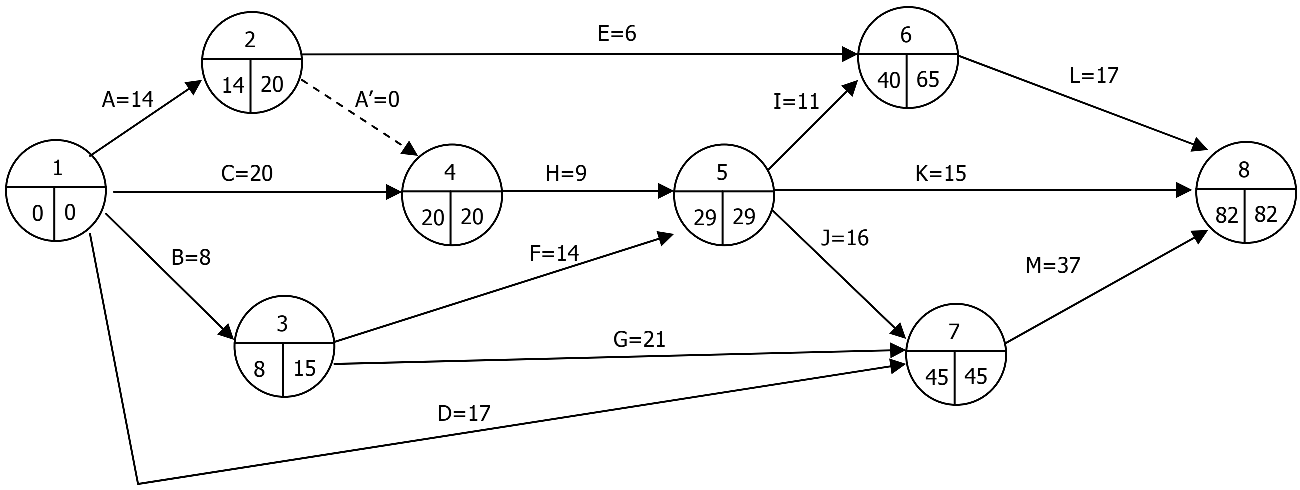


FIG 7. HOLGURA DE EVENTOS Y ACTIVIDADES

RC1= 1-4-5-7-8

RC2= 1-4-5-8

RC2= 1-7-8

Holgura de Eventos.- Es la diferencia entre el tiempo más tardío menos el tiempo más próximo de un evento.

Ejem: t3 = 8

t´3 = 15 Hi = 15-8

Hi = t´i – ti

EVENTO	t´i	ti	Hi	SITUACIO	
				C	NC
1	0	0	0	X	
2	20	14	6		X
3	15	8	7		X
4	20	20	0	X	
5	29	29	0	X	
6	65	40	25		X
7	45	45	0	X	
8	82	82	0	X	

Holgura de Actividades.- Se define como la flexibilidad de realización de ciertas actividades, cuando una actividad puede iniciar lo más pronto posible o concluir lo más tarde posible.

Hij = t´j – { ti + tij }

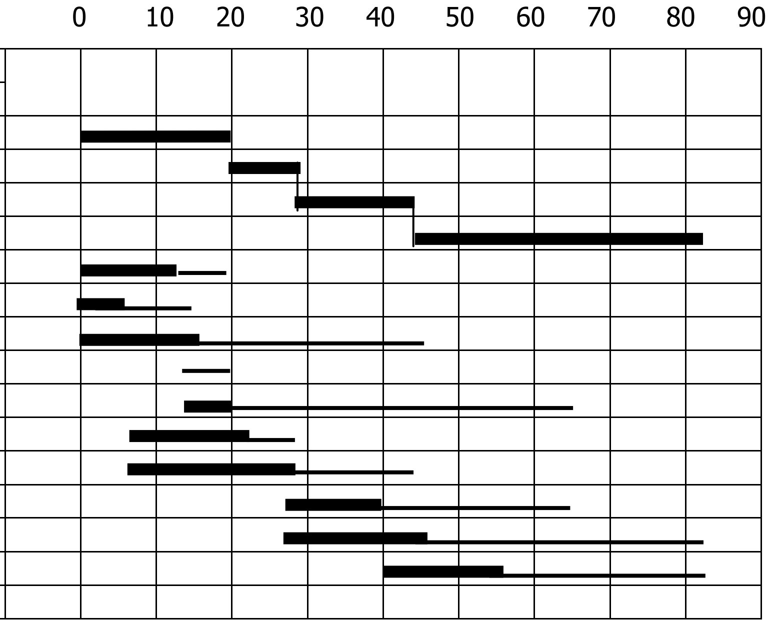
ACTIVIDADES		tij	ti	t´j	t´j – { ti + tij }	Hij	SITUACION	
Código	(i,j)						C	NC
A	1,2	14	0	20	20-{0+14}	6		X
B	1,3	8	0	15	15-{0+8}	7		X
C	1,4	20	0	20	20-{0+20}	0	X	
D	1,7	17	0	45	45-{0+17}	28		X
A’	2,4	0	14	20	20-{14+0}	6		X
E	2,6	6	14	65	65-{14+6}	45		X
F	3,5	14	8	29	29-{8+14}	7		X
G	3,7	21	8	45	45-{8+21}	16		X
H	4,5	9	20	29	29-{20+9}	0	X	
I	5,6	11	29	65	65-{29+11}	25		X
J	5,7	16	29	45	45-{29+16}	0	X	
K	5,8	15	29	82	82-{29+15}	38		X
L	6,8	17	40	82	82-{40+17}	25		X
M	7,8	37	45	82	82-{45+37}	0	X	7

Ruta critica de actividades (RCA) = C – H –J - M

Una actividad crítica es una actividad que no puede ser retardada sin afectar la duración total del proyecto. En otras palabras, en el tiempo más temprano y el tiempo más tarde de inicio de la actividad son idénticos

Cronograma de Actividades (Diagrama de Gantt).-

ACTIVIDADES		
Código	**(i,j)**	**tij**
C	1,4	20
H	4,5	9
J	5,7	16
M	7,8	37
A	1,2	14
B	1,3	8
D	1,7	17
A'	2,4	0
E	2,6	6
F	3,5	14
G	3,7	21
I	5,6	11
K	5,8	15
L	6,8	17



ACTIVIDAD = INICIO + DURACION + HOLGURA

PERT / COSTO

Generalidades.

Aparece en 1992 como complemento al PERT/TIEMPO, combina e integra en una Red dos factores importantes.

1. - Tiempo de duración de cada actividad
2. - Con el costo de cada actividad

PERT / Costo. Es una técnica de contabilidad de costo de proyectos, que permite la comparación de costos reales contra presupuestados, además, también permite comparar trabajo programado con trabajo terminado. PERT / Costo se puede definir como un sistema de administración de proyectos que mide y controla los costos mediante el uso de paquetes de trabajo.

Los problemas que se intentan resolver a través del PERT/COSTO son:

1. - Determinar el tiempo mínimo de duración de cada actividad, dando como resultado tiempos totales mínimos de duración de todo el proyecto.

2.- Determinar el costo mínimo de cada actividad para llegar a determinar los costos totales mínimos de todo el proyecto.

En el PERT/COSTO intervienen los siguientes costos:

Costos Directos.- Interviene directamente en le proyecto; mano de obra directa y materia prima.

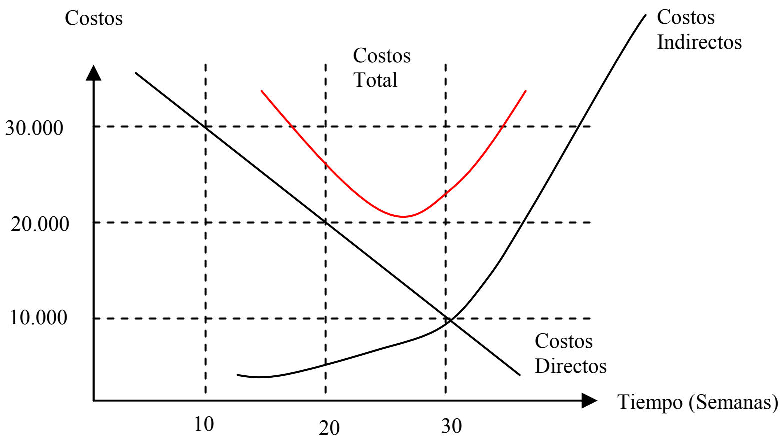
Costos indirectos.- Son aquellos que no se asignan directamente en el proyecto; mano de obra indirecta (Asesoráis), gastos generales de fabricación (energía eléctrica).

Por lo tanto los costos directos e indirectos tienen dos parámetros: El Tiempo y el Costo

Ejemplo: Proyecto de Implementación de un nuevo Sistema Financiero:

En el cual inicialmente está planificado para 30 semanas, a un costo de $ 10.000. Luego el gerente pide que se realice en 20 semanas. Entonces la reducción de este tiempo implicara incrementar los costos (más personal, más equipos, más costos)

Aplicando el PERT/COSTO vamos a determinar que ese costo no se dispare, sino que sea el mínimo incremento, es decir no incrementar los costos por incrementar. Como se muestra en la siguiente grafica

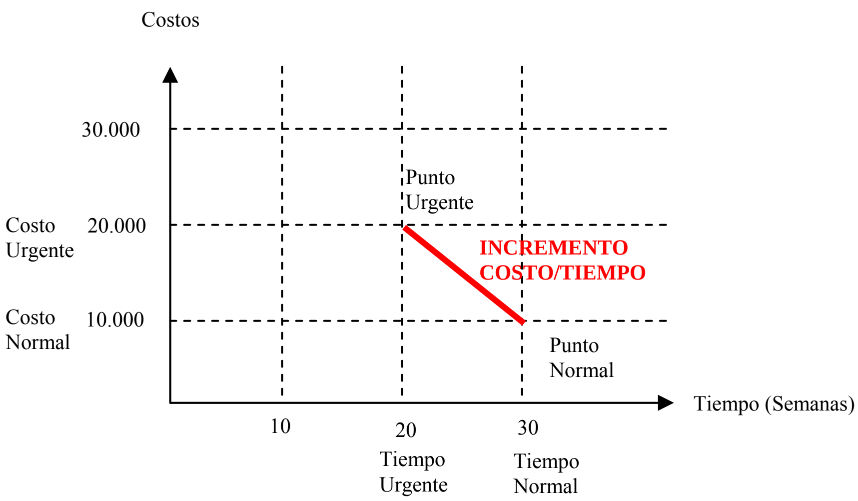


Conclusiones:

Costos directos: A mayor tiempo menor costo y a menor tiempo mayor costo

Costos indirectos: A mayor tiempo mayor costo y a menor tiempo menor costo

Incremento Costo/Tiempo.- Si integramos los dos tipos de costo tenemos la siguiente relación.



Punto Normal (PN).- Esta representado por el tiempo normal (TN), y el costo normal (CN).

Punto Urgente (PU). - Esta representado por el tiempo urgente (TU), y el costo urgente (CU)

La pendiente de costos directos $$Tg\ \beta = \frac{Sen\ \beta}{Cos\ \beta} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

En base a la pendiente el Incremento costo/tiempo $$(ICT) = \frac{(CU - CN)}{(TN - TU)}$$

Si queremos disminuir el tiempo de un determinado proyecto tenemos que acelerar las actividades de la ruta critica, para esto tenemos que escoger las actividades que nos cuesta menos es decir lo que nos de el menor costo incremental

Procedimiento.

1.- Realizar etapas previas (listas de actividades y tiempos)

2.- Construir la Red original

3.- Calcular el costo incremental para cada actividad

4.- Determinar las rutas críticas (cuadro de holguras)

5.- Determinar las posibilidades para disminuir el tiempo del proyecto en una actividad

6.- Escoger la actividad o combinación de las actividades de menor costo incremental y disminuir el tiempo en las unidades que sea posible

7. - Repetir los pasos 2 al 6 hasta que al menos una ruta critica haya llegado al límite.

Sugerencia.

1.- Reducir de derecha a izquierda (lo *más* próximo al final)

2. - Cuidar el incremento de tiempo por todas las rutas.

Ejercicios.